دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رساله دکتری ریاضی

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

خواص مانستگی و همانستگی جبرهای باناخ بر پایه سرشت‌ها

تدوین

محمد فزونی

استاد راهنما

دکترجواد لالی

استاد مشاور

دکتر مرتضی اسمعیلی

دی ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه خوارزمی

تاریخ: .....

شماره: .....

پیوست: .....

واحد: .....

صورتجلسهٔ دفاع از رسالهٔ دکتری ریاضی محض

به شکرانهٔ الهی جلسهٔ دفاعیهٔ رسالهٔ دکتری (Ph.D) **آقای محمد فزونی** دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی محض (Ph.D) دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر در تاریخ ۹۳/۱۰/۷ با حضور هیأت داوران به شرح ذیل تشکیل گردید:

۱ـ آقای دکتر جواد لآلی (استاد راهنما)

۲ـ آقای دکتر مرتضی اسمعیلی (استاد مشاور)

۳ـ آقای دکتر عبدالرسول پورعباس (دانشگاه صنعتی امیرکبیر ـ داور خارجی)

۴ـ آقای دکتر مسعود امینی (دانشگاه تربیت مدرس ـ داور خارجی)

۵ـ آقای دکتر علیرضا مدقالچی (داور داخلی)

آقای محمد فزونی نتایج اصلی رسالهٔ خود را با عنوان

مانستگی و همانستگی جبرهای باناخ بر پایه سرشت‌ها

طی سمیناری ارائه و به سؤالات هیأت داوران پاسخ داد. هیأت داوران با توجه به محتویات رساله و این که مقالات زیر از رسالهٔ ایشان استخراج شده است، صلاحیت نامبرده را برای احراز درجهٔ دکتری ریاضی محض گرایش آنالیز در سطح عالی مورد تأیید قرار دادند.

1) M. Esmaili, M. Fozouni and J. Laali, Hereditary properties of character injectivity with application to semigroup algebras. *Ann. Funct, Anal.* 6(2015), no. 2, 162-172.

2) J. Laali and M. Fozouni, Some properties of functional Banach algebra. *Facta Universitatis (NIS), Ser. Math. Inform.* Vol. 28. No 2 (2013), 189-196.

دکتر جواد لآلی — دکتر مرتضی اسمعیلی — دکتر عبدالرسول پورعباس

دکتر مسعود امینی — دکتر علیرضا مدقالچی

اسمعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران: خیابان شهید مفتح نرسیده به خیابان انقلاب ـ شماره ۴۳ ـ دانشگاه خوارزمی، کد پستی ۱۵۷۱۹-۱۴۹۱۱، تلفن: ۳-۸۸۳۲۹۲۲۰
کرج: خیابان شهید بهشتی ـ میدان دانشگاه ـ دانشگاه خوارزمی، کد پستی: ۳۱۹۷۹-۳۷۵۵۱، تلفن: ۰۲۶-۳۴۵۷۹۶۰۰
Kharazmi University, No. 43, Shahid Mofatteh Ave., Tehran, Iran
Tel: +98 21 88329220-3 www.khu.ac.ir

تقدیم به

همسرم

همراه و دوست من تا به امروز

و تقدیم به

خانواده‌ام

که دلگرمی من بودند برای حرکت و تلاش

تقدیر و تشکر:

خداوند را هزاران مرتبه شکر که به این بنده توانایی و توفیق کسب ذره‌ای از دریای بی‌کران علم خود را داد و تا به امروز در لحظه لحظه‌های زندگی‌ام مرا در پناه خود حفظ نمود و بی‌منت به من عطا کرد.

نهایت سپاس و تشکر را از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر لالی، از صمیم قلب ابراز می‌دارم، که در مدت چهار سال برای بنده بسیار وقت صرف نمودند و نه تنها استاد راهنمای علمی بلکه در تمامی جنبه‌های اخلاقی و معرفتی دیگر نیز الگوی بنده بودند. از جناب آقای دکتر اسمعیلی استاد مشاور محترم نیز نهایت تشکر و قدردانی را دارم که همواره از لحاظ علمی من را در پیچ و خم‌های پژوهش‌هایم، هدایت نمودند.

از داوران محترم این رساله، آقایان دکتر مدقالچی، دکتر پورعباس و دکتر امینی ممنون و متشکرم که زحمت داوری این رساله را به عهده گرفتند. از استاد فرهیخته، جناب آقای دکتر قاسمی بخاطر دقت در امور مرتبط با آموزش و پژوهش در دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر دانشگاه، نهایت تشکر و سپاس را دارم. از زحمات بی‌دریغ جناب آقای محمدزاده، استادیار گروه ریاضی دانشگاه خوارزمی بخاطر زحمات گرانقدرشان در جهت تهیه قالب پایان‌نامه با نرم‌افزار زی‌پرشین، نهایت تقدیر و تشکر را دارم و از خداوند، توفیق روز افزون برای ایشان آرزومندم.

از خانواده خود و خانواده همسرم که به معنی واقع کلمه شرایط بنده را در این دوران دانشجویی کاملا درک نموده و بدون هیچ توقعی همواره ما را حمایت کردند ممنون و متشکرم و امیدوارم که در آینده بتوانیم اندکی از زحمات این عزیزان را جبران نمائیم.

در پایان از زحمات همسر عزیزم که در این دوران چهار سال در واقع ما را تحمل نمودند و بنده را بسیار حمایت کردند تا من بتوانم به تحقیقات و پژوهش‌های خود برسم، نهایت تشکر را دارم و از خداوند متعال خواستارم که در ادامه راه زندگی بتوانم قدردان این از خود گذشتگی‌های ایشان باشم.

اظهارنامه

فصل‌های دوم، سوم و چهارم این رساله اصیل هستند و مقالات زیر از این فصول استخراج شده‌اند:

1. M. Essmaili, M. Fozouni and J. Laali, Hereditary properties of character injectivity with application to semigroup algebras, *Ann. Funct. Anal.* 6 (2015), no. 2, 162–172.

2. J. Laali and M. Fozouni, Some properties of functional Banach algebras, *Facta Universitatis (NIŠ), Ser. Math. Inform.* Vol. 28, No 2 (2013), 189–196.

چکیده

فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\Delta(A)$ فضای سرشت‌های جبر باناخ A متشکل از تمام هم‌ریختی‌های ناصفر از A به $\mathbb{C}$ باشد. در این رساله تمرکز ما بر عناصر $\Delta(A)$ است. در واقع برخی از خواص جبرها و مدول‌های باناخ وابسته به سرشت‌های جبر باناخ A و ارتباط آنها با مفاهیم کلاسیک را بررسی می‌کنیم.

ابتدا به معرفی دو رده مهم از جبرهای باناخ می‌پردازیم که به عنوان منبعی از مثال‌های نقض از این جبرها استفاده می‌کنیم. سپس، برای $\phi \in \Delta(A)$ به معرفی مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف برای جبر A به عنوان تعمیمی از ϕ-میانگین‌پذیری در حالتی که جبر باناخ A دارای همانی تقریبی یک‌طرفه باشد، می‌پردازیم. می‌گوئیم A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر $m \in A^{**}$ موجود باشد به قسمی که $m(\phi) = 0$ و برای هر $\psi \in \Delta(A)$ و $a \in \ker(\phi)$، $m(\psi \cdot a) = \psi(a)$. نشان می‌دهیم جبر باناخ A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر A دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف باشد. همچنین، تعدادی از خواص موروثی این مفهوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان یکی از نتایج اصلی ثابت می‌کنیم که اگر $1 < p < \infty$، آنگاه جبر فیگا-تالامانکا-هرتس $A_p(G)$، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم که عکس قضیه هلمسکی در حالتی که مفهوم میانگین‌پذیری را با ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف عوض نمائیم، برقرار است.

در انتها به مطالعه مدول‌های ϕ-انژکتیو جبر باناخ A می‌پردازیم و کاربرد نتایج به دست آمده را روی جبرهای نیم‌گروهی ارائه می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم که اگر $A = \ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$ یا $A = \ell^1(\mathbb{N}_\vee)$، آنگاه برای هر $\phi \in \Delta(A)$، $A \in \mathbf{A\text{-}mod}$، ϕ-انژکتیو است.

واژه‌های کلیدی: جبر باناخ، فضای سرشت‌ها، همانی تقریبی، ϕ-میانگین‌پذیری، مدول انژکتیو، تخت و تصویری، گروه موضعا فشرده، جبر گروهی، جبر نیم‌گروهی، جبر فیگا-تالامانکا-هرتس.

رده‌بندیِ موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 46H05، 46H25، 43A30، 22D15، 46M10، 43A20.

مقدمه

نظریه جبرهای باناخ[1] که ریشه در اوایل قرن بیستم دارد، یک نظریه مجرد ریاضی و ترکیبی از موارد مشخص از حوزه‌های متفاوت ریاضی است. جبرهای باناخ (جبرهای توپولوژیکی) به مطالعه ساختارهای جبری با یک ساختار توپولوژیکی مناسب می‌پردازد. گلفاند[2] بنیان گذار نظریه جبرهای باناخ است. او نقش اساسی ایده‌الهای ماکسیمال را تشخیص داد و با استفاده از خواص آنها، نظریه مدرن جبرهای باناخ را ساخت. در واقع برای جبر باناخ جابه‌جایی و یکدار A، ثابت می‌شود که هر ایده‌ال ماکسیمال از A برابر است با هسته یک سرشت، یعنی برای هر ایده‌ال ماکسیمال I از جبر A، هم‌ریختی ناصفر $\phi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ وجود دارد به قسمی که $\ker(\phi) = I$. اگر $\Delta(A)$ را فضای تمام هم‌ریختی‌های ناصفر از A به توی $\mathbb{C}$ تعریف نمائیم، می‌دانیم که برای هر $\phi \in \Delta(A)$، $\ker(\phi)$ یک ایده‌ال ماکسیمال جبر باناخ A است. از این رو بنا به این تناظر، در برخی از موارد، $\Delta(A)$ فضای ایده‌ال ماکسیمال جبر باناخ A نامیده می‌شود. برخی از ریاضی‌دانان نیز ترجیح می‌دهند که این فضا را فضای سرشت‌های A نام‌گذاری نمایند.

فضای سرشت‌های جبر A دارای خواص بسیار جالبی است. به عنوان مثال، با توپولوژی گلفاند، $\Delta(A)$ یک فضای هاسدورف[3] موضعا فشرده است که این امر باعث اثباتی تکنیکی و بسیار جالب در برخی از قضایای بسیار پیچیده شده است. همچنین، چون هر $\phi \in \Delta(A)$ ضربی است، به راحتی بررسی می‌گردد که هر فضای باناخ E را می‌توانیم تبدیل به یک A-مدول باناخ با اعمال زیر نمائیم:

$$a \cdot x = x \cdot a = \phi(a)x \quad (a \in A, x \in E).$$

خواص جالب سرشت‌ها باعث شده که در سالهای اخیر برخی از ریاضی‌دانان به معرفی مفاهیم جدید مرتبط با سرشت‌های جبر باناخ A بپردازند. به عنوان مثال، در سال ۲۰۰۸ میلادی، کنیوث[4]، لائو[5] و پیم[6] مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری جبر باناخ A و در همین سال به طور همزمان، سنگانی منفرد[7] مفهوم سرشت میانگین‌پذیری را به عنوان مفهومی ضعیف‌تر از میانگین‌پذیری جبرهای باناخ که توسط جانسون[8] در سال ۱۹۷۲ معرفی گردید، ارائه نمودند.

جبر باناخ A را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر برای هر A-مدول باناخ دوطرفه X، هر اشتقاق پیوسته $D : A \longrightarrow X^*$، درونی باشد؛ یعنی، $x^*_\circ \in X^*$ موجود است به قسمی که برای هر $a \in A$، $D(a) = a \cdot x^*_\circ - x^*_\circ \cdot a$. به همین ترتیب، A را انقباض‌پذیر می‌نامیم اگر برای هر A-مدول باناخ دوطرفه X، هر اشتقاق پیوسته $D : A \longrightarrow X$ درونی باشد. جبر باناخ A را ϕ-میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر برای هر A-مدول باناخ دوطرفه X به قسمی که $a \cdot x = \phi(a)x$، هر اشتقاق پیوسته $D : A \longrightarrow X^*$ درونی باشد و A را سرشت میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر برای هر $\phi \in \Delta(A) \cup \{\circ\}$، A، ϕ-میانگین‌پذیر باشد.

---

[1] Banach [2] Gelfand [3] Hausdorff [4] Kaniuth [5] Lau [6] Pym [7] Sangani–Monfared [8] Johnson

از سوی دیگر به موازات کارهای جانسون، هلمسکی[۹] به مطالعه مفاهیم مانستگی جبرهای باناخ و ارتباط آنها با مفهوم میانگین‌پذیری پرداخت و به نتایج بسیار جالب توجهی رسید که توجیهی برای اهمیت و گستردگی بحث جبرهای باناخ بود. در واقع هلمسکی توانست مفهوم میانگین‌پذیری را کاملا با برخی از مفاهیم جبری (مانستگی) مرتبط نماید.

در نظریه مدول‌ها در جبر مجرد سه رده مهم، مدول‌های انژکتیو، تخت و تصویری وجود دارند. هلمسکی گزاره بعدی را ثابت نمود؛ فرض کنیم E یک A-مدول چپ است،

- اگر A انقباض‌پذیر باشد، آنگاه E تصویری است.
- اگر A میانگین‌پذیر باشد، آنگاه E تخت است.

اما عکس گزاره‌های فوق سال‌های زیادی است که هنوز حل نشده است. در واقع این سئوال به این صورت مطرح می‌گردد که اگر هر A-مدول دوطرفه باناخ E تخت (تصویری) باشد، آیا جبر باناخ A میانگین‌پذیر (انقباض‌پذیر) است؟

این سئوال در حالتی که A جبر باناخ خاصی باشد حل شده است. به عنوان مثال در سال ۲۰۰۴ دلز[۱۰] و پولییاکو[۱۱] نشان دادند که اگر G یک گروه موضعا فشرده باشد و $A = L^1(G)$، آنگاه A به عنوان یک A-مدول چپ انژکتیو است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر و گسسته باشد. در نتیجه طبق قضیه جانسون $A = L^1(G)$ میانگین‌پذیر است. همچنین در سال ۲۰۱۳، دلز، داوز[۱۲]، فام[۱۳] و رامسدن[۱۴] اثبات کردند که اگر برای $1 < p < \infty$، $L^1(G)$-مدول دوطرفه باناخ $L^p(G)$ انژکتیو باشد، آنگاه G و در نتیجه $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است. به موازات کار اخیر، ریاضی‌دان اتریشی بانام راچر[۱۵] در سال ۲۰۱۳ قضیه فوق را به این صورت تعمیم داد که اگر $L^1(G)$ دارای یک مدول اساسی و انعکاسی باشد که انژکتیو است، در این صورت G میانگین‌پذیر است.

از سوی دیگر، اخیرا نصر-اصفهانی [۱۶] و سلطانی رنانی[۱۷] مفاهیمی را با نام مدول ϕ-انژکتیو و مدول ϕ-تخت که تعمیمی است از مدول انژکتیو و مدول تخت، معرفی نمودند.

با توجه به مفاهیم فوق، آن‌ها سئوال مطرح شده توسط هلمسکی را به صورت زیر حل نمودند:

جبر باناخ A، ϕ-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر تمام مدول‌های باناخ چپ E، ϕ-تخت باشند، یعنی E^*، ϕ-انژکتیو راست باشد.

این رساله شامل ۴ فصل می‌باشد که در فصل اول تنها به بیان و معرفی برخی از تعاریف و قضایای اولیه که در این رساله نیاز است، می‌پردازیم.

فصل‌های دو، سه و چهار کاملا از همدیگر مستقل هستند. در فصل دوم، دو جبر باناخ را معرفی می‌کنیم که دارای فضای سرشت‌های کوچکی هستند که در ادامه از این جبرهای باناخ به عنوان مثال نقض برای بیان تمایز مفاهیم ارائه شده با

---

[۹] Helemskii [۱۰] Dales [۱۱] Polyakov [۱۲] Daws [۱۳] Pham [۱۴] Ramsden [۱۵] Racher [۱۶] Nasr–Isfahani [۱۷] Soltani Renani

مفاهیم کلاسیک و از پیش تعریف شده، استفاده می‌کنیم. در واقع فرض کنیم X یک فضای باناخ و $f \in X^{(n-1)}, F \in X^{(n+1)}$ عناصری ناصفر باشند که $||f|| \leq 1$ و $||F|| \leq 1$. نگاشت‌های $\circ_f : X^{(n)} \times X^{(n)} \longrightarrow X^{(n)}$ و $\circ^F : X^{(n)} \times X^{(n)} \longrightarrow X^{(n)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$b_1 \circ_f b_2 = b_1(f)b_2, \quad b_1 \circ^F b_2 = F(b_1)b_2 \quad (b_1, b_2 \in X^{(n)}).$$

ثابت می‌شود که $X^{(n)}$ با هر یک از دو ضرب تعریف شده و نرم عملگری، یک جبر باناخ است. در ادامه این فصل به مطالعه و بررسی برخی از خواص این جبرهای باناخ به صورت زیر می‌پردازیم:

ابتدا نشان می‌دهیم که این جبرهای باناخ دقیقا چه وقت جابه‌جایی و یکدار هستند. سپس نشان می‌دهیم که برای هر $m \in \mathbb{Z}^+$ این جبرهای باناخ، $(2m+1)$-میانگین‌پذیر ضعیف هستند. همچنین، توصیفی از میانگین‌پذیری این جبرهای باناخ ارائه می‌شود و در پایان نشان می‌دهیم که این جبرها آرنز منظم هستند.

در فصل سوم، به معرفی مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف برای جبر A به عنوان تعمیمی از ϕ-میانگین‌پذیری در حالتی که جبر باناخ A دارای همانی تقریبی یک‌طرفه باشد، می‌پردازیم. می‌گوئیم A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر $m \in A^{**}$ موجود باشد به قسمی که $m(\phi) = 0$ و برای هر $\psi \in \Delta(A)$ و $a \in \ker(\phi)$، $m(\psi \cdot a) = \psi(a)$.

ثابت می‌شود که A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر A دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف باشد. همچنین مثالی از یک جبر باناخ را ارائه می‌دهیم که دارای همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف نیست. در ادامه نوعی خاص از عنصر همانی برای یک جبر باناخ که فضای سرشت‌های آن ناتهی است را معرفی می‌کنیم، سپس برای جبرهای باناخ متناهی بعد که ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف هستند با استفاده از این مفهوم یک شرط لازم را ارائه می‌دهیم. همچنین تعدادی از خواص موروثی این مفهوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان یکی از نتایج اصلی ثابت می‌کنیم که $A_p(G)$، جبر فیگا-تالامانکا-هرتس، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد.

به عنوان یکی دیگر از نتایج این فصل، نشان می‌دهیم که عکس قضیه هلمسکی در حالتی که مفهوم میانگین‌پذیری را با ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف عوض نمائیم، برقرار است. در ادامه فصل نیز، بخشی را تنها به بیان مثال‌هایی حول این مفهوم، اختصاص می‌دهیم.

در فصل چهارم، به مطالعه مدول‌های ϕ-انژکتیو می‌پردازیم. در ابتدا یک شرط کافی برای ϕ-انژکتیو بودن مدول‌های چپ در حالتی که جبر باناخ A جابه‌جایی است را به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی است، $\phi \in \Delta(A)$ و $E \in \mathbf{A\text{-}mod}$. در این صورت E، ϕ-انژکتیو چپ است اگر $E^{\perp} \cap (\ker(\phi))^c \neq \emptyset$. یکی از نتایج خوب که از این قضیه استخراج می‌گردد این است که می‌توانیم جبرهای خارج قسمتی زیادی را بیابیم که ϕ-انژکتیو هستند. در ادامه این فصل نیز به بیان چند قضیه دیگر که خواص موروثی مفهوم مدول ϕ-انژکتیو را بین جبر باناخ A و ایده‌ال‌های بسته‌اش بدست می‌آورد، می‌پردازیم. به عنوان یکی از نتایج

جالب نشان می‌دهیم که اگر J یک ایده‌ال بسته به طور مکمل ناوردا از جبر باناخ A باشد، آنگاه $J, A/J \in \mathbf{A\text{-}mod}$، ϕ-انژکتیو هستند اگر و تنها اگر $A \in \mathbf{A\text{-}mod}$ این‌گونه باشد. در انتهای این فصل نیز کاربرد قضایا و نتایج مطرح شده را روی جبرهای نیم‌گروهی بررسی می‌کنیم. در واقع، اگر $S = \mathbb{N}_\wedge$ و $S = \mathbb{N}_\vee$ دو نیم‌گروه به ترتیب با اعمال، مینیمم و ماکسیمم باشند، آنگاه نشان می‌دهیم که جبر نیم‌گروهی $A = \ell^1(S)$، برای هر $\phi \in \Delta(\ell^1(S))$، ϕ-انژکتیو است.

نکته: در طول این رساله، اولین عدد بعد از شماره مرجع در حین ارجاع دادن، به معنی فصل مورد نظر است. به عنوان مثال، [14, 5. Theorem 4.7] یعنی، قضیه 4.7، فصل 5 از مرجع [14]. همچنین [7, 4] یعنی، فصل چهارم از مرجع [7].

فهرست مطالب

۱ پیش نیازها **۱**

۱.۱ مقدمات آنالیز تابعی ۱

۲.۱ مقدمات آنالیز هارمونیک ۶

۳.۱ نیم‌گروهها و جبرهای نیم‌گروهی ۱۳

۴.۱ مانستگی و همانستگی مدول‌های باناخ ۱۵

۲ جبرهای باناخ تابعکی **۲۱**

۱.۲ معرفی ۲۱

۲.۲ برخی از خواص جبرهای تابعکی ۲۳

۳ سرشت میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ **۲۸**

۱.۳ مقدمه ۲۸

۲.۳ حالتی خاص از ϕ-میانگین‌پذیری جبرهای باناخ ۲۹

۳.۳ برخی از ویژگی‌های موروثی ۳۶

۴.۳ ارتباط با گروه‌های میانگین‌پذیر ۳۸

۵.۳ مثال‌ها ۴۳

۴ ویژگی‌های موروثی مدول‌های سرشت انژکتیو **۴۷**

۱.۴ مقدمه ۴۷

۲.۴ مدول‌های ϕ-انژکتیو و برخی از خواص موروثی آنها ۴۹

۳.۴ کاربرد روی جبرهای نیم‌گروهی ۵۴

مراجع **۵۸**

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۶۳

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۶۵

نمایه ۶۷

چکیدهٔ انگلیسی ۶۹

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل تعاریف و مقدمات مورد نیاز در فصول بعدی این رساله، برای خوانندگانی که آشنایی لازم و کافی با مفاهیم آنالیز تابعی، آنالیز هارمونیک، مانستگی و همانستگی را ندارند، از مراجع [7]، [8]، [14]، [19]، [28]، [31]، [49] و [58] ارائه می‌دهیم.

۱.۱ مقدمات آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای برداری است. یک نرم روی X نگاشت $||\cdot|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که:*

- *برای هر $x \in X$، $||x|| \geq 0$ و $||x|| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.*
- *برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in X$، $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$.*
- *برای هر $x, y \in X$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.*

در این صورت $(X, ||\cdot||)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم. اگر هر دنباله کوشی[1] در فضای X همگرا باشد، $(X, ||\cdot||)$ را یک فضای باناخ می‌نامیم. در واقع هر فضای نرمدار کامل یک فضای باناخ است.

فرض کنیم X یک فضای باناخ است. دوگان X، یعنی X^*، فضای تمام تابعک‌های خطی کراندار از X به توی $\mathbb{C}$ است. همچنین، پیش دوگان X، برابر است با فضای باناخ Y به قسمی که $X = Y^*$.

در برخی از محاسبات از نماد $< f, x >= f(x)$ برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ استفاده خواهیم کرد. دوگانهای بالاتر از فضای X را نیز می‌توانیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X^{**} = (X^*)^*, X^{***} = (X^{**})^*, \ldots.$$

نشاننده کانونی از X به توی X^{**} را با نماد ι_X و یا بطور خلاصه ι نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$< \iota_X(x), f >=< f, x >, \quad (x \in X, f \in X^*).$$

---

[1] Cauchy

در ادامه از نماد $\iota_X(x) = \widehat{x}$ استفاده می‌کنیم. فضای باناخ X انعکاسی است اگر $\iota_X(X) = X^{**}$.

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنیم Y یک زیر فضای بسته از فضای باناخ X است. یک تصویر از X به روی Y عملگر خطی کراندار $P \in B(X)$ است به قسمی که $P^2 = P \circ P = P$ و $P(X) = Y$. زیر فضای بسته Y را یک زیر فضای مکمل از X می‌نامیم اگر یک تصویر از X به روی Y موجود باشد.*

تعریف ۳.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ است. توپولوژی حاصل از نرم فضای باناخ X را توپولوژی قوی روی X می‌نامیم.*

توپولوژی ضعیف روی X که آنرا با نماد $\sigma(X, X^*)$ و یا w نمایش می‌دهیم، برابر است با توپولوژی تولید شده توسط خانواده نیم‌نرمهای $\{p_f : f \in X^*\}$ که $p_f(x) = |f(x)|$.

توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* که آنرا با نماد $\sigma(X^*, X)$ و یا w^* نشان می‌دهیم، برابر است با توپولوژی تولید شده توسط خانواده نیم‌نرمهای $\{p_{\hat{x}} : x \in X\}$.

تور $(x_\alpha) \subseteq X$ در توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ به $x \in X$ میل می‌کند اگر و تنها اگر،

$$f(x_\alpha) \longrightarrow f(x) \quad (f \in X^*).$$

همچنین تور $(f_\alpha) \subseteq X^*$ در توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ به $f \in X^*$ میل می‌کند اگر و تنها اگر،

$$f_\alpha(x) \longrightarrow f(x) \quad (x \in X).$$

نکته ۱. *در حالتی که X یک فضای متناهی بعد است، این سه توپولوژی روی X^* با یکدیگر برابر می‌شوند. در حالت کلی یکی از مزایای معرفی توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف ستاره، معرفی یک فضای توپولوژیک با تعداد مجموعه‌های باز کمتر است. در این حالت تعداد مجموعه‌های فشرده فضا برای محاسبات تکنیکی در اثبات برخی از قضایا بیشتر می‌شود.*

قضیه ۱.۱.۱. [49, Theorem 2.38, Theorem 2.39] (*هاینه-بورل*[۲]) *فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار است. در این صورت گوی یکه و بسته X فشرده است اگر و تنها اگر X متناهی بعد باشد.*

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ است.*

الف) [58, Theorem 3.15] (*باناخ-آل‌اوغلو*[۳]) *گوی یکه X^* با توپولوژی ضعیف ستاره، فشرده است.*

ب) [14, 5.Theorem 4.5] (*گلدشتاین*[۴]) *برای هر $F \in X^{**}$ تور (x_α) در X وجود دارد به قسمی که، $||x_\alpha|| \leq ||F||$ و $\widehat{x_\alpha} \longrightarrow F$ در توپولوژی ضعیف ستاره از X^{**}.*

[۲] Heine-Borel [۳] Alaoglu [۴] Goldstine

پ) [58, Theorem 3.12] (مازور[۵]) *برای هر زیر مجموعه محدب S از X بستار ضعیف S و بستار قوی S برابر هستند.*

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنیم A یک فضای باناخ و $p : A \times A \longrightarrow A$ یک نگاشت دوخطی است که برای هر $a, b, c \in A$ در شرایط زیر صدق می‌کند:*

$$p(a, p(b, c)) = p(p(a, b), c)$$

$$||p(a, b)|| \leq ||a||||b||.$$

در این صورت می‌گوئیم A یک جبر باناخ است. نگاشت p را ضرب جبر باناخ A می‌نامیم و در ادامه از نماد $p(a, b) = ab$ برای نشان دادن ضرب a در b استفاده خواهیم کرد.

می‌گوئیم جبر باناخ A یکدار است اگر دارای عضو همانی (واحد) e باشد به قسمی که $||e|| = ۱$.

تعریف ۵.۱.۱. *نگاشت $\phi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک سرشت از A می‌نامیم اگر ϕ، ناصفر، خطی و ضربی باشد، یعنی برای هر $a, b \in A$، $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. فضای تمام سرشت‌های جبر باناخ A را با نماد $\Delta(A)$ نشان می‌دهیم.*

طبق [58, Theorem 7.10]، برای هر $\phi \in \Delta(A)$ داریم $||\phi|| \leq ۱$. بنابراین $\Delta(A) \subseteq A^*$. همچنین فضای $\Delta(A)$ با توپولوژی ضعیف ستاره که از A^* به ارث می‌برد یک فضای توپولوژیک هاسدورف موضعا فشرده است و در حالتی که A یکدار باشد، فشرده می‌شود [58, Theorem 11.9].

فرض کنیم $\ker(\phi)$ هسته سرشت ϕ، یعنی مجموعه $\{x \in A : \phi(x) = ۰\}$ است. در این صورت به وضوح بررسی می‌گردد که $\ker(\phi)$ از هم‌بعد یک است یعنی بعد فضای $\frac{A}{\ker(\phi)}$ یک می‌باشد. چون $\phi \in \Delta(A)$، $a_۰ \in A$ وجود دارد به قسمی که $\phi(a_۰) = ۱$، حال برای هر $a + \ker(\phi) \in \frac{A}{\ker(\phi)}$ ملاحظه می‌کنیم که،

$$a + \ker(\phi) = \phi(a)(a_۰ + \ker(\phi)).$$

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $n > ۲$ یک عدد طبیعی است. تابع خطی و ناصفر $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک n-هم‌ریختی می‌نامیم اگر*

$$f(a_۱ a_۲ a_۳ \ldots a_n) = f(a_۱) f(a_۲) f(a_۳) \ldots f(a_n) \quad (a_۱, \ldots, a_n \in A).$$

فضای تمام n-هم‌ریختی‌های جبر باناخ A را با نماد $\Delta_n(A)$ نمایش می‌دهیم. مفهوم n-هم‌ریختی برای اولین بار در سال ۲۰۰۵ در [27] ارائه شد. به وضوح هر سرشت از جبر باناخ A یک n-هم‌ریختی است ولی عکس این گزاره در حالت کلی درست نمی‌باشد. به عنوان مثال اگر $\phi \in \Delta(A)$ و قرار دهیم، $f = -\phi$، آنگاه f یک ۳-هم‌ریختی است ولی یک سرشت از A نیست.

[۵] Mazur

تعریف ۷.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $A^\sharp$ برابر است با $A \oplus \mathbb{C}$. $A^\sharp$ با اعمال جمع، ضرب و نرم زیر یک جبر باناخ یکدار با عضو همانی $e_A = (0, 1)$ است:*

$$(a_1, \lambda_1) + (a_2, \lambda_2) = (a_1 + a_2, \lambda_1 + \lambda_2)$$

$$(a_1, \lambda_1).(a_2, \lambda_2) = (a_1 a_2 + a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_1, \lambda_1 \lambda_2)$$

$$||(a_1, \lambda_1)|| = ||a_1|| + |\lambda_1|,$$

که $a_1, a_2 \in A$ و $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. دقت می‌کنیم که برای هر $\phi \in \Delta(A)$، نگاشت $\widetilde{\phi}$ با ضابطه، $\widetilde{\phi}(a, \lambda) = \phi(a) + \lambda$ یک سرشت از جبر باناخ $A^\sharp$ است. به وضوح بررسی می‌شود $\Delta(A^\sharp) = \Delta(A) \cup \{\phi_\infty\}$ که $\phi_\infty(a, \lambda) = \lambda$.

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ هستند و $x \in X, y \in Y$. تابعک دوخطی $x \otimes y$ روی $X^* \times Y^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x \otimes y)(f, g) = f(x)g(y) \quad (f \in X^*, g \in Y^*).$$

تعریف ۸.۱.۱. *فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ هستند. فضای حاصل ضرب تانسوری تصویری $X\widehat{\otimes}Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$X\widehat{\otimes}Y = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n : x_n \in X, y_n \in Y, \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||||y_n|| < \infty \right\}.$$

فضای $X\widehat{\otimes}Y$ با نرم زیر یک فضای باناخ است:

$$||d||_\pi = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||||y_n||, d = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \right\}.$$

طبق [7, Proposition A.3.70]، دوگان فضای باناخ $X\widehat{\otimes}Y$ برابر است با $B(X, Y^*)$ که در آن دوگانی کانونی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$< T, x \otimes y > = < Tx, y > \quad (x \in X, y \in Y, T \in B(X, Y^*)).$$

فرض کنیم A, B دو جبر باناخ هستند. در این صورت فضای $A\widehat{\otimes}B$ با ضرب زیر و نرم $||\cdot||_\pi$ یک جبر باناخ است:

$$(a \otimes d)(c \otimes b) = ac \otimes db \quad (a, c \in A, b, d \in B).$$

تعریف ۹.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ، B یک زیر مجموعه از A و (e_α) توری در A است. تور (e_α) را یک،*

الف) *همانی تقریبی چپ (راست) می‌نامیم اگر برای هر $a \in A$، $||ae_\alpha - a|| \longrightarrow 0$ ($||e_\alpha a - a|| \longrightarrow 0$). همچنین تور (e_α) را همانی تقریبی می‌نامیم اگر یک همانی تقریبی چپ و راست باشد.*

ب) *همانی تقریبی ضعیف می‌نامیم اگر برای هر $a \in A$ و $f \in A^*$، $|f(ae_\alpha) - f(a)| + |f(e_\alpha a) - f(a)| \longrightarrow 0$.*

پ) *همانی تقریبی Δ-ضعیف برای B می‌نامیم اگر برای هر $a \in B$ و $\phi \in \Delta(A)$، $|\phi(ae_\alpha) - \phi(a)| \longrightarrow 0$.*

در حالتی که تور (e_α) کراندار باشد، همانی‌های فوق را به ترتیب، همانی تقریبی کراندار، همانی تقریبی ضعیف کراندار و همانی تقریبی Δ-ضعیف کراندار می‌نامیم.

قضیه بعدی نشان می‌دهد که مفاهیم همانی تقریبی کراندار و همانی تقریبی ضعیف کراندار با یکدیگر معادل هستند.

قضیه ۳.۱.۱. [13, Proposition 33.2] *فرض کنیم A یک جبر باناخ است. در این صورت A دارای یک همانی تقریبی کراندار است اگر و تنها اگر یک همانی تقریبی ضعیف کراندار داشته باشد.*

جونز[۶] و لاهر[۷] در [35] نشان دادند که در حالت کلی دو همانی تقریبی و همانی تقریبی Δ-ضعیف در هر دو حالت کراندار و بی‌کران، با یکدیگر متفاوت هستند. در واقع آنها جبر باناخی را ارائه نمودند که دارای یک همانی تقریبی Δ-ضعیف کراندار است اما دارای هیچ همانی تقریبی کراندار و یا بی‌کران نیست.

تعریف ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است. برای هر $a, b \in A$، $\lambda \in A^*$ و $\Phi \in A^{**}$ نگاشتهای $a \cdot \lambda, \lambda \cdot a, \lambda \cdot \Phi, \Phi \cdot \lambda \in A^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$< a \cdot \lambda, b >=< \lambda, ba > \quad , \quad < \lambda \cdot a, b >=< \lambda, ab >$$

$$< \lambda \cdot \Phi, a >=< \Phi, a \cdot \lambda > \quad , \quad < \Phi \cdot \lambda, a >=< \Phi, \lambda \cdot a > .$$

حال دو ضرب $\Box$ (ضرب آرنز[۸] چپ) و $\Diamond$ (ضرب آرنز راست) روی A^{**} را نیز به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$< \Phi \Box \Psi, \lambda >=< \Phi, \Psi \cdot \lambda >, \quad < \Phi \Diamond \Psi, \lambda >=< \Psi, \lambda \cdot \Phi >, \quad (\Phi, \Psi \in A^{**}, \lambda \in A^*).$$

با توجه به [7, Theorem 2.6.15]، $(A^{**}, \Box)$ و $(A^{**}, \Diamond)$ دو جبر باناخ هستند. می‌گوئیم A آرنز منظم است اگر

$$\Phi \Box \Psi = \Phi \Diamond \Psi \quad (\Phi, \Psi \in A^{**}).$$

به طور معادل، A آرنز منظم است اگر برای هر $\Phi, \Psi \in A^{**}$ و تورهای $(a_\alpha), (b_\beta)$ که به ترتیب در توپولوژی ضعیف ستاره به Φ, Ψ همگرا هستند،

$$\lim_\alpha \lim_\beta < \lambda, a_\alpha b_\beta >= \lim_\beta \lim_\alpha < \lambda, a_\alpha b_\beta > \quad (\lambda \in A^*),$$

هرگاه که هر دو حد مکرر فوق موجود باشند.

تعریف ۱۱.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است. نگاشت $* : A \longrightarrow A, a \longrightarrow a^*$ را یک برگشت می‌نامیم، اگر دارای خواص زیر باشد:*

---

[۶] Jones [۷] Lahr [۸] Arens

- *برای هر* $\alpha \in \mathbb{C}$ *و* $a, b \in A$، $(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha} a^* + b^*$.
- *برای هر* $a, b \in A$، $(ab)^* = b^* a^*$.
- *برای هر* $a \in A$، $(a^*)^* = a$.

اگر برای هر $a \in A$، $||aa^*|| = ||a||^۲$، *می‌گوئیم* $(A, *)$ *یک* C^**-جبر است.*

یکی از خواص بسیار جالب C^*-جبرها قضیه بعدی است.

قضیه ۴.۱.۱. [48, Theorem 3.1.2] *فرض کنیم* A *یک* C^**-جبر و* I *یک ایده‌ال بسته از* A *است. در این صورت* A *و* I *دارای همانی تقریبی کراندار هستند.*

۲.۱ مقدمات آنالیز هارمونیک

تعریف ۱.۲.۱. *مجموعه ناتهی* G *را یک گروه می‌نامیم اگر تابع* $\star : G \times G \longrightarrow G$ *موجود باشد به قسمی که دارای خواص زیر است:*

- *برای هر* $a, b, c \in G$، $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.
- *عضو* $e \in G$ *موجود است به قسمی که برای هر* $a \in G$، $a \star e = e \star a = a$.
- *برای هر* $a \in G$، $b \in G$ *موجود است به قسمی که* $a \star b = b \star a = e$.

عضو e *را همانی گروه* G *و عضو* b *در قسمت سوم را وارون* a *می‌نامیم که در برخی از موارد آن را با* $a^{-۱}$ *نیز نمایش می‌دهیم. در ادامه، از نماد* $a \star b = ab$ *برای هر* $a, b \in G$ *استفاده می‌کنیم.*

در ادامه گروه G را با یک توپولوژی تجهیز می‌کنیم و به بررسی ساختار گروه G همراه با این توپولوژی می‌پردازیم.

تعریف ۲.۲.۱. *گروه* G *را یک گروه موضعا فشرده می‌نامیم اگر* G *یک فضای توپولوژیک هاسدورف و موضعا فشرده باشد و نگاشت‌های زیر پیوسته باشند:*

$$G \times G \longrightarrow G, (s, t) \longrightarrow st, \quad G \longrightarrow G, t \longrightarrow t^{-۱}.$$

یکی از موارد بسیار مهم در بحث آنالیز هارمونیک این است که هر گروه موضعا فشرده G دارای یک اندازه منظم ناوردای چپ است. از این رو برای ورود به مبحث آنالیز هارمونیک، ابتدا مفهوم σ-جبر و اندازه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۱. *فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و $\mathfrak{M}$ گردایه‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X است. گوئیم $\mathfrak{M}$ یک σ-جبر روی X است اگر دارای خواص زیر باشد:*

- *برای هر دنباله $(E_n) \subseteq \mathfrak{M}$، $\cup_n E_n \in \mathfrak{M}$.*
- *اگر $E \in \mathfrak{M}$، آنگاه $E^c \in \mathfrak{M}$.*

نگاشت $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0, \infty]$ را یک اندازه روی X می‌نامیم اگر $\mu(\emptyset) = 0$ و برای هر دنباله (E_n) از زیر مجموعه‌های مجزا در $\mathfrak{M}$، $\mu(\cup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$.

قضیه ۱.۲.۱. [59, Theorem 1.10] *فرض کنیم $\mathfrak{F}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعه X است. در این صورت σ-جبر $\mathfrak{M}$ در X وجود دارد به قسمی که کوچکترین σ-جبر شامل $\mathfrak{F}$ است.*

حال فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک است. طبق قضیه فوق می‌دانیم که σ-جبری در X وجود دارد به قسمی که کوچکتری σ-جبر شامل τ است. این σ-جبر را σ-جبر بورل [۹] روی X می‌نامیم و آن را با نماد $\mathfrak{B}(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. *فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $\mu : \mathfrak{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ یک اندازه روی X است. اندازه μ را یک اندازه بورل منظم مثبت روی X می‌نامیم اگر دارای خواص زیر باشد:*

- *برای هر زیر مجموعه فشرده $K \subseteq X$، $\mu(K) < \infty$.*
- *برای هر $E \in \mathfrak{B}(X)$، $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subseteq U$ باز است $U\}$.*
- *برای هر مجموعه باز U در X، $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U$ فشرده است $K\}$.*

برخی از مولفین، به اندازه بورل منظم مثبت، اندازه رادون [۱۰] می‌گویند.

قضیه بعدی یکی از قضایایی اساسی در آنالیز هارمونیک مجرد است.

قضیه ۲.۲.۱. [19, Proposition 2.19, Theorem 2.10] *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. در این صورت اندازه بورل منظم مثبت λ روی G وجود دارد به قسمی که در شرایط زیر صدق می‌کند.*

الف) *برای هر زیر مجموعه باز و ناتهی $U \subseteq G$ داریم، $\lambda(U) > 0$.*

ب) *برای هر $s \in G$ و $E \in \mathcal{B}(G)$ داریم، $\lambda(sE) = \lambda(E)$.*

[۹] Borel

[۱۰] Radon

اندازه λ در قضیه فوق را اندازه هار (چپ) [۱۱] روی G می‌نامیم که نسبت به ضرب یک ثابت مثبت یکتاست؛ یعنی اگر μ اندازه بورل منظم و مثبت دیگری روی G باشد که در شرایط قضیه صدق کند، آنگاه ثابت $c > ۰$ وجود دارد به قسمی که $\mu = c\lambda$.

اگر H یک فضای هیلبرت باشد، عملگر $T \in B(H)$ را یکانی می‌نامیم اگر $TT^* = T^*T = Id_H$ که T^* همان عملگر الحاقی T است که به صورت زیر مشخص می‌گردد:

$$< Tx, y >=< x, T^*y > \qquad (x, y \in H).$$

در ادامه $\mathcal{U}(H)$ را فضای تمام عملگرهای خطی کراندار یکانی روی H در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. همریختی $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(H_\pi)$ را که در آن H_π یک فضای هیلبرت است، یک نمایش یکانی از گروه G می‌نامیم اگر π نسبت به توپولوژی عملگری قوی از $\mathcal{U}(H_\pi)$ پیوسته باشد، یعنی برای هر $x \in G$ و تور (x_α) در G که به x همگراست،*

$$||\pi(x_\alpha)h - \pi(x)h|| \longrightarrow ۰ \qquad (h \in H_\pi).$$

مجموعه تمام نمایش‌های یکانی گروه G را با نماد Σ_G نشان می‌دهیم.

به عنوان مثالی از یک نمایش برای گروه موضعا فشرده G نگاشت $L : G \longrightarrow B(L^۲(G))$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$(L(x)f)(y) = f(x^{-۱}y) \qquad (x, y \in G, f \in L^۲(G)).$$

به راحتی بررسی می‌گردد که L با ضابطه فوق یک نمایش از گروه G است که آنرا نمایش منظم چپ از G روی فضای هیلبرت $L^۲(G)$ می‌نامیم و در برخی از موارد $L(x)$ را به صورت L_x نشان می‌دهیم.

برای هر $۱ \leq p < \infty$ فرض کنیم $L^p(G)$ فضای تمام توابع اندازه پذیر f از G به توی $\mathbb{C}$ است که

$$||f||_p^p = \int_G |f(t)|^p d\lambda(t) < \infty.$$

از طرفی $L^\infty(G) = L^۱(G)^*$، برابر است با فضای تمام توابع اندازه‌پذیر موضعی، که به جز روی یک مجموعه موضعا پوچ، کراندار هستند. این فضا با ضرب نقطه وار و نرم زیر تبدیل به یک جبر باناخ می‌گردد:

$$||f||_\infty = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ موضعا تقریبا همه جا}\}.$$

همچنین $L^۱(G)$ با نرم $||\cdot||_۱$ و ضرب،

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-۱}x)d\lambda(y) = \int_G f(xy)g(y^{-۱})d\lambda(y) \qquad (x \in G),$$

تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود که آن را جبرگروهی گروه G می‌نامیم. ضرب فوق را پیچش می‌نامیم.

[۱۱] Haar measure

قضیه ۳.۲.۱. [19, Proposition 2.24] *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. در این صورت جبر باناخ $L^1(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است.*

تعریف ۶.۲.۱. *گروه موضعا فشرده G را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر تابعک خطی کراندار $\Lambda : L^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ موجود باشد به قسمی که $\Lambda(1) = ||\Lambda|| = 1$ و*

$$\Lambda(L_x f) = \Lambda(f) \quad (x \in G, f \in L^\infty(G)).$$

هر گروه فشرده و همچنین هر گروه آبلی میانگین‌پذیر هستند [60] .

فرض کنیم $\widehat{G}$ مجموعه تمام هم‌ریختی‌های پیوسته از گروه G به توی دایره یکه $\mathbb{T}$ باشد. به ازای هر $\rho \in \widehat{G}$ نگاشت ϕ_ρ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi_\rho(h) = \int_G \overline{\rho(x)} h(x) dx \quad (h \in L^1(G)).$$

بنا به [32, Theorem 23.7] داریم:

$$\Delta(L^1(G)) = \{\phi_\rho : \rho \in \widehat{G}\}.$$

تعریف ۷.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و $S(G)$ یک زیر جبر از $L^1(G)$ است. می‌گوئیم $S(G)$ یک جبر سگال[۱۲] است اگر دارای خواص زیر باشد:*

- *$S(G)$ در $(L^1(G), ||\cdot||_1)$ چگال است.*
- *$S(G)$ تحت نرم $||\cdot||_{S(G)}$ یک جبر باناخ است که برای هر $f \in S(G)$، $||f||_1 \leq ||f||_{S(G)}$.*
- *$S(G)$ تحت انتقال ناورداست، یعنی برای هر $f \in S(G)$ و $x \in G$، $L_x f \in S(G)$.*
- *برای هر $f \in S(G)$ نگاشت $y \longrightarrow L_y f$ از G به توی $S(G)$ پیوسته است و $||L_x f||_{S(G)} = ||f||_{S(G)}$.*

برای دیدن جزئیات و قضایای مرتبط با جبرهای سگال به [57] *و* [56] *مراجعه نمائید.*

نکته ۲. *اولین مثال از یک جبر سگال در حالت $G = \mathbb{R}$ توسط وینر[۱۳] در سال ۱۹۳۲ ارائه شد* [65]. *سپس در سال ۱۹۴۷، برای اولین بار، سگال[۱۴] اصول موضوع جبرهای سگال را معرفی نمود* [62]. *قابل ذکر است که ریتر[۱۵] با اندکی تغییر در اصول موضوع ارائه شده توسط سگال در سال ۱۹۶۸، در* [56] *تعریف جامع و کامل‌تری از جبرهای سگال را معرفی کرد. بعد از آن، بورنهام[۱۶] در سال ۱۹۷۲ توانست تعاریف فوق را از جبرهای گروهی به جبرهای باناخ دلخواه توسعه دهد و اصول موضوع و تعریف جدید خود را جبر سگال مجرد نامید* [4].

---

[۱۲] Segal [۱۳] Wiener [۱۴] Segal [۱۵] Reiter [۱۶] Burenham

تعریف ۸.۲.۱. *برای هر $1 < p < \infty$ فرض کنیم،*

$$A_p(G) = \{u \in C_\circ(G) : u = \sum_{i=1}^{\infty} f_i * \widetilde{g_i}, f_i \in L^p(G), g_i \in L^q(G), 1/p + 1/q = 1, \sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_p ||g_i||_q < \infty\},$$

که در آن برای هر $x \in G$، $\widetilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. $A_p(G)$ را جبر فیگا-تالامانکا-هرتس[۱۷] می‌نامیم که نسبت به اعمال نقطه وار و نرم زیر یک جبر باناخ است:

$$||u||_{A_p(G)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_p ||g_i||_q : u = \sum_{i=1}^{\infty} f_i * \widetilde{g_i} \right\}.$$

اگر $p = 2$، آنگاه $A(G) = A_2(G)$ را جبر فوریه گروه G می‌نامیم، که بنا بر [12, 3. Theorem 2] اگر G یک گروه آبلی باشد، آنگاه $A(G)$ به طور یک‌ریخت طول‌پای برابر با $L^1(\widehat{G})$ است.

اگر برای $x \in G$ تابع ϕ_x روی $A_p(G)$ را به صورت $\phi_x(f) = f(x)$ تعریف کنیم، آنگاه بنا به [29, Theorem 3] داریم،

$$\Delta(A_p(G)) = \{\phi_x : x \in G\} = G.$$

نکته ۳. *جبرهای فوریه، برای نخستین بار توسط ریاضی‌دان فرانسوی، پییر ایمارد[۱۸] در سال ۱۹۶۴ ارائه گردید [17]. بعد از آن، در سال ۱۹۶۵ ریاضی‌دان ایتالیایی، الساندرو فیگا-تالامانکا برای گروههای آبلی در [18] جبر $A_p(G)$ را معرفی کرد. سپس، در همین سال، این فضا برای گروههای موضعا فشرده دلخواه توسط ریاضی‌دان کانادایی، کارل هرتس در [30] تعمیم یافت و ثابت شد که این فضای باناخ با ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ است. از این رو، جبر $A_p(G)$ را، جبر فیگا-تالامانکا-هرتس می‌نامند. یکی از مرجع‌های خوب، علاوه بر مراجع ذکر شده برای مطالعه این جبرها، مرجع [12] است.*

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و H یک زیر مجموعه بسته از G است. قرار می‌دهیم:

$$I_p(H) = \{u \in A_p(G) : u(x) = 0, x \in H \text{ برای هر}\}.$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $I_p(H)$ یک ایده‌ال بسته از $A_p(G)$ است.

قضیه ۴.۲.۱. [61, Lemma 3.19] *فرض کنیم H یک زیرگروه بسته از گروه موضعا فشرده G است. در این صورت جبر خارج قسمتی $A_p(G)/I_p(H)$ به طور طول‌پای با $A_p(H)$ یک‌ریخت است.*

قضیه ۵.۲.۱. [29, Theorem 1a] *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و H یک زیرگروه بسته از G است. در این صورت نگاشت*

$$A_p(G) \longrightarrow A_p(H) \quad u \longrightarrow u_{|H},$$

یک نگاشت خطی نرم‌کاهشی است.

[۱۷] Figa–Talamanca–Herz

[۱۸] Eymard

تعریف ۹.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع است. تکیه‌گاه f، برابر است با بستار مجموعه $\{x \in G : f(x) \neq 0\}$. تکیه‌گاه تابع f را با نماد $\mathrm{supp(f)}$ نمایش می‌دهیم. گردایه تمام توابع پیوسته مختلط مقدار روی گروه G با تکیه‌گاه فشرده را با نماد $C_c(G)$ نشان می‌دهیم.*

قضیه ۶.۲.۱. [12, 3. Proposition 1, Corollary 7] *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده، $1 < p < \infty$، $K \subseteq G$ فشرده و U شامل K و باز است. در این صورت $u \in A_p(G) \cap C_c(G)$ وجود دارد به قسمی که $\mathrm{supp(u)} \subseteq U$، برای هر $x \in G$، $0 \leq u(x) \leq 1$ و برای هر $x \in K$، $u(x) = 1$. بعلاوه، $A_p(G) \cap C_c(G)$ در $A_p(G)$ چگال است.*

لم ۷.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است و $1 < p < \infty$. اگر $u \in A_p(G)$ و $a \in G$، آنگاه $L_a u \in A_p(G)$ و $||u||_{A_p(G)} = ||L_a u||_{A_p(G)}$.*

برهان. فرض کنیم $u = \sum_{i=1}^{\infty} f_i * \widetilde{g_i}$ یک نمایش از u است که در آن $(f_i) \subseteq L^p(G), (g_i) \subseteq L^q(G)$. با توجه به تعریف ضرب پیچش داریم:

$$\begin{aligned} L_a u(x) = u(a^{-1}x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i * \widetilde{g_i}(a^{-1}x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i(y) g_i(x^{-1}ay^{-1}) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i(a^{-1}y) g_i(x^{-1}y) dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} L_a f_i * \widetilde{g_i}. \end{aligned}$$

به وضوح $(L_a f_i) \subseteq L^p(G)$ و $||L_a f_i||_p = ||f_i||_p$. بنابراین، $L_a u \in A_p(G)$. همچنین،

$$||L_a u||_{A_p(G)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} ||L_a f_i||_p ||\widetilde{g_i}||_q = \sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_p ||\widetilde{g_i}||_q.$$

در نتیجه،

$$||L_a u||_{A_p(G)} \leq ||u||_{A_p(G)}.$$

از طرفی داریم،

$$||u||_{A_p(G)} = ||L_e u||_{A_p(G)} = ||L_{a^{-1}a} u||_{A_p(G)} \leq ||L_a u||_{A_p(G)}.$$

بنابراین، $||u||_{A_p(G)} = ||L_a u||_{A_p(G)}$. □

تعریف ۱۰.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده، $1 < p < \infty$ و $\lambda_p : G \longrightarrow B(L^p(G))$ نمایش منظم چپ از G روی $L^p(G)$ است، یعنی*

$$(\lambda_p(x)\xi)(y) = \xi(x^{-1}y) \quad (x, y \in G, \xi \in L^p(G)).$$

نگاشت $\widetilde{\lambda_p} : L^1(G) \longrightarrow B(L^p(G))$ *را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$< \widetilde{\lambda_p}(f)\xi, \zeta >= \int_G f(x) < \lambda_p(x)\xi, \zeta > d\lambda(x) \quad (f \in L^1(G), \xi \in L^p(G), \zeta \in L^q(G)),$$

که $1/p + 1/q = 1$. *چون* $L^p(G)$ *انعکاسی است، از این رو* $B(L^p(G))$ *یک فضای دوگان است. در نتیجه دارای توپولوژی ضعیف ستاره می‌باشد. دوگان* $A_p(G)$ *طبق* [12, 4. Theorem 6] *برابر است با:*

$$A_p(G)^* = PM_p(G) = \overline{\widetilde{\lambda_p}(L^1(G))}^{w^*}$$

که توسط دوگانی کانونی زیر بدست می‌آید:

$$< f * \tilde{g}, T >=< Tf, g > \quad (f \in L^p(G), g \in L^q(G), T \in PM_p(G)).$$

هر عضو از فضای $PM_p(G)$ را یک p-شبه‌اندازه می‌نامیم.

قضیه ۸.۲.۱. [12, 5. Corollary 3] *فرض کنیم* G *یک گروه میانگین پذیر و* $1 < p < \infty$. *در این صورت داریم،*

$$PM_p(G) = \{T \in B(L^p(G)) : T(L_x g) = L_x T(g) \quad \forall x \in G, g \in L^p(G)\} = CV_p(G).$$

در طول سالها، میانگین‌پذیری گروه موضعا فشرده G به روشهای گوناگون توصیف شده است. قضیه زیر یکی از این توصیفات با استفاده از ساختار جبرهای فیگا-تالامانکا-هرتس می‌باشد.

قضیه ۹.۲.۱. [52, Theorem 10.4] *(لپتین-هرتس[۱۹]) فرض کنیم* G *یک گروه موضعا فشرده است. در این صورت جبر باناخ* $A_p(G)$ *که* $1 < p < \infty$، *دارای یک همانی تقریبی کراندار است اگر و تنها اگر* G *یک گروه میانگین‌پذیر باشد.*

قضیه فوق در حالت $p = 2$ منسوب به لپتین [44] و در حالت کلی منسوب به هرتس [29] است.

تعریف ۱۱.۲.۱. *فرض کنیم* G *یک گروه موضعا فشرده است،* $1 \leq r \leq \infty$ *و* $1 < p < \infty$. *قرار می‌دهیم:*

$$A_p^r(G) = A_p(G) \cap L^r(G), \quad |||u||| = ||u||_{A_p(G)} + ||u||_r \quad (u \in A_p^r(G)).$$

فضای $A_p^r(G)$ *همراه با نرم* $|||\cdot|||$، *جمع و ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ است که آن را جبر لبگ[۲۰]-فیگا-تالامانکا-هرتس می‌نامند* [25].

قضیه ۱۰.۲.۱. [25, Theorem 1, Theorem 2] *فرض کنیم* G *یک گروه موضعا فشرده است،* $1 \leq r \leq \infty$ *و* $1 < p < \infty$. *فضای* $A_p^r(G)$ *همراه با نرم* $|||\cdot|||$، *جمع و ضرب نقطه‌وار یک جبر باناخ جابه‌جایی و نیم‌ساده است به قسمی که* $\Delta(A_p^r(G)) = G$. *بعلاوه، اگر* G *یک گروه فشرده باشد و یا* $r = \infty$، *آنگاه* $A_p^r(G) = A_p(G)$.

[۱۹] Leptin-Herz [۲۰] Lebesgue

نکته ۴. *جبرهای باناخ $A_p^r(G)$، در حالت $p = ۲, r = ۱$ نخستین بار در سال ۲۰۰۲ توسط قهرمانی و لائو در* [24] *با نام جبرهای لبگ-فوریه معرفی شدند. سپس در سال ۲۰۰۶ این جبرها توسط گرانیرر*[۲۱] *به صورت تعریف ۱۱.۲.۱ ارائه گردید. گرانیرر نشان داد که برخی از خواص جبر باناخ $A_p^r(G)$ وقتی که $۱ \leq r < \infty$ کاملا با خواص جبر $A_p(G)$ متمایز است.*

فرض کنیم A یک جبر باناخ با فضای سرشت‌های ناتهی و $C_{BSE}(\Delta(A))$ نشان دهنده تمام توابع σ در $C(\Delta(A))$ است به قسمی دارای خواص زیر هستند:

عدد حقیقی مثبت β وجود دارد به قسمی که برای هر تعداد متناهی عدد مختلط $c_۱, c_۲, c_۳, \ldots, c_n$ و سرشت‌های $\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳, \ldots, \phi_n$ نامساوی زیر برقرار است:

$$|\Sigma_{i=۱}^{i=n} c_i \sigma(\phi_i)| \leq \beta ||\Sigma_{i=۱}^{n} c_i \sigma||_{A^*}.$$

همچنین فرض کنیم $M(\widehat{A}) = \{f \in C(\Delta(A)) : f\widehat{a} \in \widehat{A} \quad (a \in A)\}$ که در آن $\widehat{a}$ همان تبدیل گلفاند a است.

تعریف ۱۲.۲.۱. *جبر باناخ A را یک BSE-جبر می‌نامیم اگر $C_{BSE}(\Delta(A)) = M(\widehat{A})$. به عنوان مثال اگر G یک گروه آبلی موضعا فشرده باشد، آنگاه $L^۱(G)$ یک BSE-جبر است* [63, Remark, pp 151].

نکته ۵. *تعریف BSE-جبر برای اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط تاکاهاشی*[۲۲] *و هاتوری*[۲۳] *در* [63] *ارائه گردید. ایده اصلی این تعریف بر مبنای قضیه کلاسیک* [63, Theorem(Bochner-Schoenberg-Eberlein), pp. 149] *برای جبرهای گروهی بدست آمده است. به همین منظور با توجه به حروف اول نامهای این سه ریاضی‌دان، این رده از جبرها را BSE-جبرها نام‌گذاری کرده‌اند.*

قضیه ۱۱.۲.۱. [33, Lemma 1.1] *فرض کنیم $S(G)$ یک جبر سگال روی یک گروه موضعا فشرده آبلی G است. در این صورت $S(G)$ یک BSE-جبر است اگر و تنها اگر $S(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف باشد.*

۳.۱ نیم‌گروهها و جبرهای نیم‌گروهی

تعریف ۱.۳.۱. *مجموعه ناتهی S را یک نیم‌گروه می‌نامیم هرگاه یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر روی S موجود باشد، یعنی نگاشت $S \times S \longrightarrow S, (s,t) \longrightarrow st$ موجود است به قسمی که*

$$(st)k = s(tk) \quad (s,t,k \in S).$$

به عنوان مثال $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی همراه با عمل جمع، یک نیم‌گروه است.

Granirer[۲۱] Takahasi[۲۲] Hatori[۲۳]

تعریف ۲.۳.۱. *فرض کنیم S یک نیم‌گروه است. عضو $p \in S$ را خودتوان می‌نامیم هرگاه $p^2 = pp = p$. مجموعه تمام عناصر خودتوان را با نماد $E(S)$ نشان می‌دهیم. نیم‌گروه S را یک نیم‌مشبکه می‌نامیم هرگاه S جابه‌جایی باشد و $E(S) = S$.*

تعریف ۳.۳.۱. *فرض کنیم S یک نیم‌گروه است. برای $s, t \in S$ قرار می‌دهیم:*

$$[st^{-1}] = \{u \in S : ut = s\},$$

$$[t^{-1}s] = \{u \in S : tu = s\}.$$

عضو $t \in S$ را حذف‌شدنی چپ می‌نامیم هرگاه برای هر $u, v \in S$ که $tu = tv$ نتیجه شود که $u = v$. به طور مشابه مفهوم عضو حذف‌شدنی راست نیز تعریف می‌گردد. نیم‌گروه S را حذف‌شدنی می‌نامیم هرگاه هر عضو از S حذف‌شدنی راست و چپ باشد.

همچنین نیم‌گروه S را حذف‌شدنی ضعیف چپ (راست) می‌نامیم اگر برای هر $s, t \in S$ مجموعه $[t^{-1}s]$ ($[st^{-1}]$) یک مجموعه متناهی باشد. نیم‌گروه S را حذف‌شدنی ضعیف می‌نامیم هرگاه هم حذف‌شدنی ضعیف راست و هم چپ باشد.

تعریف ۴.۳.۱. *فرض کنیم S یک نیم‌گروه و $\ell^1(S)$ مجموعه تمام سری‌های $f = \sum_{r \in S} \alpha_r \delta_r$ است به قسمی که،*

$$||f||_1 = \sum_{r \in S} |\alpha_r| = \sup_{K \subseteq S} \left\{ \sum_{r \in K} |\alpha_r| : K \text{ متناهی است} \right\} < \infty.$$

در اینجا دقت کنید که δ_r تابعی است دو مقداری روی S که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_r(s) = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \quad (s \in S).$$

برای هر $f = \sum_{r \in S} \alpha_r \delta_r$ و $g = \sum_{r \in S} \beta_r \delta_r$ از $\ell^1(S)$ قرار می‌دهیم:

$$f * g = \sum_{t \in S} (\sum_{rs = t} \alpha_r \beta_s) \delta_t,$$

و $\sum_{rs=t} \alpha_r \beta_s = 0$ در صورتی که r, s ای در S با شرط $rs = t$ وجود نداشته باشند. در چنین حالتی $(\ell^1(S), *, ||\cdot||_1)$ را جبر نیم‌گروهی از S می‌نامیم که به وضوح یک جبر باناخ است.

به راحتی بررسی می‌گردد که $\ell^1(S)$ جابه‌جایی است اگر و تنها اگر S یک نیم‌گروه جابه‌جایی باشد.

تعریف ۵.۳.۱. *فرض کنیم S یک نیم‌گروه است و $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$. نگاشت $\varphi : S \longrightarrow \overline{\mathbb{D}}$ را یک نیم‌سرشت روی S می‌نامیم در صورتی که*

$$\varphi \neq 0, \quad \varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t) \quad (s, t \in S).$$

مجموعه تمام نیم‌سرشت‌های نیم‌گروه S را با نماد Φ_S نشان می‌دهیم و آن را فضای نیم‌سرشت‌های نیم‌گروه S می‌نامیم. به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\Delta(\ell^1(S)) = \left\{ \widehat{\phi} : \sum_{r\in S} \alpha_r \delta_r \longrightarrow \sum_{r\in S} \alpha_r \phi(r) : \phi \in \Phi_S \right\}.$$

سرشت $\widehat{\phi_S} : \sum_{r\in S} \alpha_r \delta_r \longrightarrow \sum_{r\in S} \alpha_r$ را سرشت بدیهی روی $\ell^1(S)$ می‌نامیم که از نیم‌سرشت بدیهی $\phi_S : s \longrightarrow 1$ بدست می‌آید [8, 4].

۴.۱ مانستگی و همانستگی مدول‌های باناخ

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ است. می‌گوئیم X یک A-مدول چپ است اگر نگاشت دو خطی $(a,x) \longrightarrow a\cdot x$ از $A\times X$ به توی X موجود باشد به قسمی که،

$$a\cdot(b\cdot x) = (ab)\cdot x \quad (a,b\in A, x\in X).$$

مشابه با تعریف اخیر A-مدول راست نیز تعریف می‌شود. فضای باناخ X را که هم یک A-مدول چپ و A-مدول راست می‌باشد، یک A-مدول دوطرفه می‌نامیم اگر،

$$a\cdot(x\cdot b) = (a\cdot x)\cdot b \quad (a,b\in A, x\in X).$$

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ است. می‌گوئیم X یک باناخ A-مدول چپ است اگر ثابت $C>0$ موجود باشد به قسمی که،*

$$||a\cdot x|| \le C||a||||x|| \quad (a\in A, x\in X).$$

مشابه با تعریف اخیر مفهوم باناخ A-مدول راست نیز تعریف می‌شود. فضای باناخ X را یک باناخ A-مدول دوطرفه می‌نامیم اگر ثابت $C>0$ موجود باشد به قسمی که،

$$||a\cdot x|| \le C||a||||x||, \quad ||x\cdot a|| \le C||x||||a|| \quad (a\in A, x\in X).$$

در حالتی که A یک جبر یکدار با عضو همانی e است، فضای باناخ X را یک باناخ A-مدول چپ یکدار می‌نامیم اگر X یک باناخ A-مدول چپ باشد و برای هر $x\in X$، $e\cdot x = x$. باناخ A-مدول دوطرفه X را متقارن می‌نامیم اگر برای هر $a\in A$ و $x\in X$، $a\cdot x = x\cdot a$.

تعریف ۲.۴.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است. می‌گوئیم A یک جبر باناخ دوگان است اگر زیر مدول بسته E از A^* وجود داشته باشد به قسمی که $A = E^*$. در واقع می‌گوئیم که A یک جبر باناخ دوگان نسبت به E است اگر ضرب جبر A به طور مجزا در توپولوژی $\sigma(A,E)$ پیوسته باشد.*

فرض کنیم S یک نیم‌گروه است. می‌دانیم که یکی از پیش دوگان‌های جبر باناخ $\ell^1(S)$ فضای باناخ زیر است:

$$c_0(S) = \{f \in \ell^1(S) : \text{برای هر } \varepsilon > 0 \text{، } \{t \in S : |f(t)| \geq \varepsilon\} \text{ متناهی است}\}.$$

قضیه ۱.۴.۱. [8, Theorem 4.6] *فرض کنیم S یک نیم‌گروه نامتناهی است. در این صورت $\ell^1(S)$ یک جبر باناخ دوگان نسبت به $c_0(S)$ است اگر و تنها اگر S یک نیم‌گروه حذف‌شدنی ضعیف باشد.*

گردایه تمام باناخ A-مدول‌های چپ، باناخ A-مدول‌های راست، باناخ A-مدول‌های دوطرفه و باناخ A-مدول‌های چپ یکدار را به ترتیب با نمادهای **A-mod**، **mod-A**، **A-mod-A** و **A-unmod** نمایش می‌دهیم.

اگر $X \in$ **A-mod-A**، آنگاه $X^* \in$ **A-mod-A** با اعمال مدولی زیر:

$$< x, a \cdot x^* > = < x \cdot a, x^* >, \quad < x, x^* \cdot a > = < a \cdot x, x^* > \quad (a \in A, x \in X, x^* \in X^*).$$

تعریف ۳.۴.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $X \in$ **A-mod-A**. نگاشت خطی $D : A \longrightarrow X$ را یک اشتقاق می‌نامیم اگر،*

$$D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b \quad (a, b \in A).$$

در ادامه، تمام اشتقاق‌ها را پیوسته در نظر می‌گیریم.

برای هر $x \in X$ نگاشت $ad_x : A \longrightarrow X$ با ضابطه $ad_x(a) = a \cdot x - x \cdot a$ یک اشتقاق است که آن را اشتقاق درونی تولید شده توسط x می‌نامیم.

برای هر $X \in$ **A-mod-A**، فرض کنیم $Z^1(A, X)$ نشان دهنده فضای تمام اشتقاق‌های پیوسته از A به توی X است و $N^1(A, X)$ نشان دهنده فضای تمام اشتقاق‌های درونی از A به توی X باشد. فضای خارج قسمتی،

$$\mathcal{H}^1(A, X) = \frac{Z^1(A, X)}{N^1(A, X)},$$

را گروه همانستگی از مرتبه اول A با ضرایب در X می‌نامیم.

تعریف ۴.۴.۱. *جبر باناخ A را میانگین‌پذیر می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر $X \in$ **A-mod-A**، هر اشتقاق از A به توی X^* درونی باشد و یا به‌طور معادل $\mathcal{H}^1(A, X^*) = \{0\}$. همچنین، A را انقباض‌پذیر می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر $X \in$ **A-mod-A**، هر اشتقاق از A به توی X درونی باشد و یا $\mathcal{H}^1(A, X) = \{0\}$. به ازای $m \in \mathbb{Z}^+$، جبر باناخ A را (m)-میانگین‌پذیر ضعیف می‌نامیم، در صورتی که $\mathcal{H}^1(A, A^{(m)}) = \{0\}$. اگر $m = 1$، آنگاه جبر باناخ A را میانگین‌پذیر ضعیف می‌نامیم.*

قضیه ۲.۴.۱. [60, Proposition 2.2.1] *فرض کنیم A یک جبر باناخ میانگین‌پذیر است. در این صورت A دارای همانی تقریبی کراندار است.*

تعریف ۵.۴.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\phi \in \Delta(A)$. می‌گوئیم جبر باناخ A، ϕ-میانگین‌پذیر است در صورتی که $m \in A^{**}$ موجود باشد به قسمی که $m(\phi) = ۱$ و*

$$m(f \cdot a) = \phi(a)m(f) \quad (a \in A, f \in A^*).$$

تابعک m که در شرایط فوق صدق می‌کند را یک ϕ-میانگین می‌نامیم. جبر باناخ A را سرشت میانگین‌پذیر می‌نامیم در صورتی که به ازای هر $\phi \in \Delta(A)$، ϕ-میانگین‌پذیر و دارای یک همانی راست تقریبی کراندار باشد.

به وضوح هر جبر باناخ میانگین‌پذیر، ϕ-میانگین‌پذیر است، ولی عکس این گزاره درحالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال با توجه به [39, Example 2.6]، به ازای هر گروه موضعا فشرده G، در صورتی که $x \in G$، جبر فوریه $A(G)$، ϕ_x-میانگین‌پذیر است. از طرفی طبق [22, Theorem 2.3]، می‌دانیم که $A(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر G دارای یک زیرگروه آبلی از اندیس متناهی باشد. بنابراین، در صورتی که G یک گروه موضعا فشرده باشد به قسمی که دارای هیچ زیرگروه آبلی از اندیس متناهی نیست، نتیجه می‌گیریم که $A(G)$ میانگین‌پذیر نیست اما برای هر $\phi \in \Delta(A(G))$، ϕ-میانگین‌پذیر است.

قضیه ۳.۴.۱. [39, Theorem 1.1] *فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت جبر باناخ A، ϕ-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر $X \in$ **A-mod-A** به قسمی که $a \cdot x = \phi(a)x$، تمام اشتقاق‌های $D : A \longrightarrow X$ درونی باشند.*

قضیه ۴.۴.۱. [39, Corollary 2.3] *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت $\ker(\phi)$ دارای یک همانی تقریبی راست کراندار است اگر و تنها اگر A، ϕ-میانگین‌پذیر و دارای یک همانی تقریبی راست کراندار باشد.*

با استفاده از قضیه ۴.۴.۱، می‌توانیم مثالی از جبر باناخی را ارائه نمائیم که میانگین‌پذیر نیست ولی سرشت میانگین‌پذیر است. هاگروپ[۲۴] در سال ۱۹۸۳ ثابت کرد که هر C^*-جبر A میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر A اتمی[۲۵] باشد [26] (برای دیدن تعریف مفهوم C^*-جبر اتمی به مرجع [48] مراجعه نمائید).

بنابراین، هر C^*-جبر غیر اتمی میانگین‌پذیر نیست، اما با توجه به قضیه‌های ۴.۴.۱ و ۴.۱.۱ سرشت میانگین‌پذیر است.

چون هر جبر باناخ میانگین‌پذیر دارای یک همانی تقریبی کراندار است نتیجه بعدی از قضیه فوق حاصل می‌گردد.

نتیجه ۱.۴.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ میانگین‌پذیر و $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت $\ker(\phi)$ دارای یک همانی تقریبی راست کراندار می‌باشد.*

---

[۲۴] Haagerup

[۲۵] nuclear

قضیه ۵.۴.۱. [45, Corollary 2.4] *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده، $1 < p < \infty$ و A یکی از دو جبر باناخ $L^1(G)$ و یا $A_p(G)$ باشد. در این صورت G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر A، برای هر $\phi \in \Delta(A) \cup \{0\}$، ϕ-میانگین‌پذیر باشد.*

تعریف ۶.۴.۱. *فرض کنیم $E, F \in$ **A-mod** و $T : E \longrightarrow F$ یک نگاشت خطی و کراندار است. می‌گوئیم T پذیرفتنی[۲۶] است اگر نگاشت خطی و کراندار $S : F \longrightarrow E$ موجود باشد به قسمی که $T \circ S \circ T = T$ و یا بطور معادل $\ker T$ در E مکمل و $\mathrm{Im}T$ در F بسته و مکمل باشد. در واقع اگر S موجود باشد، آنگاه $E = \ker T \oplus \mathrm{Im}(S \circ T)$ و $F = \mathrm{Im}T \oplus \ker(T \circ S)$.*

فرض کنیم ${}_AB(E, F)$ خانواده تمام هم‌ریختی‌های A-مدولی چپ از E به توی F است، یعنی

$${}_AB(E, F) = \{T \in B(E, F) : T(a.x) = a.T(x)\ \forall x \in X, a \in A\}.$$

به همین ترتیب $B_A(E, F)$ برابر است با فضای تمام هم‌ریختی‌های A-مدولی راست از E به F.

تعریف ۷.۴.۱. *عملگر $T \in {}_AB(E, F)$ را یک درون‌بری[۲۷] می‌نامیم اگر $S \in {}_AB(F, E)$ موجود باشد به قسمی که $T \circ S = I_F$. در این حالت F را یک درون‌بر از E می‌نامیم. همچنین نگاشت T را یک دوگان درون‌بری[۲۸] می‌نامیم اگر $S \in {}_AB(F, E)$ موجود باشد به قسمی که $S \circ T = I_E$.*

تعریف ۸.۴.۱. *فرض کنیم $P \in$ **A-mod**. می‌گوئیم P تصویری چپ است اگر برای هر $E, F \in$ **A-mod** و نگاشت پذیرفتنی پوشای $T : E \longrightarrow F$، نگاشت القایی $J_T : {}_AB(P, E) \longrightarrow {}_AB(P, F)$ با ضابطه $J_T(R) = T \circ R$ پوشا باشد. همچنین $I \in$ **A-mod** را انژکتیو چپ می‌نامیم اگر برای هر نگاشت پذیرفتنی یک به یک $T : E \longrightarrow F$، نگاشت القایی $K_T : {}_AB(F, I) \longrightarrow {}_AB(E, I)$ با ضابطه $K_T(R) = R \circ T$ پوشا باشد.*

مشابه با تعاریف فوق، مفاهیم تصویری راست و انژکتیو راست نیز تعریف می‌شود.

*مدول $F \in$ **A-mod** را تخت چپ می‌نامیم اگر $F^* \in$ **mod-A** انژکتیو راست باشد.*

قضیه ۶.۴.۱. [54, Corollary 2.2.8] *فرض کنیم A یک جبر باناخ است.*

الف) *فرض کنیم A یک زیر جبر از جبر باناخ B است. اگر $B \in$ **mod-A** انژکتیو باشد، آنگاه $b \in B$ وجود دارد به قسمی که برای هر $a \in A$، $ba = a$.*

ب) *فرض کنیم I یک ایده‌ال بسته راست در A است. اگر $A/I \in$ **mod-A** انژکتیو باشد، آنگاه I دارای یک همانی مدولار چپ است.*

[۲۶] admissible [۲۷] retraction [۲۸] co-retraction

پ) *فرض کنیم I یک ایده‌ال بسته مکمل راست در A است. اگر $I \in$ **mod-A** انژکتیو باشد، آنگاه $b \in I$ وجود دارد به قسمی که برای هر $a \in I$، $ba = a$.*

ت) *فرض کنیم I یک ایده‌ال بسته و مکمل راست در A است. اگر $I^{**} \in$ **mod-A** انژکتیو باشد، آنگاه I دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار است.*

قسمت الف) قضیه فوق نتیجه می‌دهد که اگر A یک جبر باناخ و $A \in$ **mod-A** انژکتیو باشد، آنگاه A دارای یک همانی چپ است. به طور مشابه در حالت انژکتیو چپ، جبر باناخ A دارای یک همانی راست است.

برای $E \in$ **A-mod** پوچ‌ساز چپ E را به صورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$E^{\perp} = \{a \in A : a \cdot E = \{\circ\}\}.$$

قضیه ۷.۴.۱. [54, Proposition 2.2.3] *فرض کنیم A یک جبر باناخ، $E \in$ **mod-A** انژکتیو و $a_\circ \in A \setminus \{\circ\}$ عضوی باشد به قسمی که $a_\circ A = \circ$. در این صورت $E^{\perp} = E \cdot a_\circ$.*

تعریف ۹.۴.۱. *فرض کنیم $E, F \in$ **A-mod** و $Z^1(A \times E, F)$ نشان دهنده فضای تمام نگاشت‌های دوخطی پیوسته B از $A \times E$ به توی F باشد که در شرط*

$$a \cdot B(b, x) - B(ab, x) + B(a, b \cdot x) = \circ \quad (a, b \in A, x \in E),$$

صدق می‌کند. همچنین فرض کنیم $\delta^\circ : B(E, F) \longrightarrow Z^1(A \times E, F)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$(\delta^\circ T)(a, x) = a \cdot T(x) - T(a \cdot x) \quad (T \in B(E, F), a \in A, x \in E).$$

در این صورت داریم،

$$\mathrm{Ext}^1_A(E, F) = \frac{Z^1(A \times E, F)}{\mathrm{Im}\delta^\circ}.$$

قضیه ۸.۴.۱. [28, Theorem 4.12] *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $E, F \in$ **A-mod**. در این صورت $\mathrm{Ext}^1_A(E, F)$ و $\mathcal{H}^1(A, B(E, F))$ به طور توپولوژیکی با یکدیگر یک‌ریخت هستند که در آن $B(E, F) \in$ **A-mod-A** با اعمال مدولی زیر در نظر گرفته می‌شود:*

$$(a \cdot T)(x) = a \cdot T(x), \quad (T \cdot a)(x) = T(a \cdot x) \quad (T \in B(E, F), a \in A, x \in E).$$

قضیه ۹.۴.۱. [28, Proposition 4.5] *فرض کنیم A یک جبر باناخ است.*

الف) *اگر برای هر $E \in$ **A-mod**، $\mathrm{Ext}^1_A(P, E) = \{\circ\}$، آنگاه مدول $P \in$ **A-mod** تصویری چپ است.*

ب) *اگر برای هر $E \in$ **A-mod**، $\mathrm{Ext}^1_A(E, I) = \{\circ\}$، آنگاه مدول $I \in$ **A-mod** انژکتیو چپ است.*

اگر $E, F \in$ **A-mod**، آنگاه $E\widehat{\otimes}F$ با اعمال مدولی زیر متعلق به گردایه **A-mod-A** است:

$$a \cdot (x \otimes y) = a \cdot x \otimes y, \quad (x \otimes y) \cdot a = x \otimes a \cdot y \quad (a \in A, x \in E, y \in F).$$

قضیه بعد یکی از ارتباط‌های بین مفاهیم مانستگی و همانستگی را نشان می‌دهد که منسوب به هلمسکی است.

قضیه ۱۰.۴.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $E \in$ **A-mod** یا $E \in$ **mod-A**.*

الف) *اگر A انقباض‌پذیر باشد، آنگاه E تصویری است.*

ب) *اگر A میانگین‌پذیر باشد، آنگاه E تخت است.*

برهان. الف: فرض کنیم A انقباض‌پذیر است و $E \in$ **A-mod**. پس $\mathcal{H}^1(A, X) = \{0\}$ برای هر $X \in$ **A-mod-A**. از طرفی می‌دانیم که برای هر $F \in$ **A-mod**،

$$\mathrm{Ext}^1_A(E, F) = \mathcal{H}^1(A, B(E, F)).$$

بنابراین برای هر $F \in$ **A-mod**، $\mathrm{Ext}^1_A(E, F) = \{0\}$. در نتیجه E تصویری چپ است.

ب: فرض کنیم A میانگین‌پذیر است. از این رو برای هر $F \in$ **A-mod** داریم،

$$\mathrm{Ext}^1_A(F, E^*) = \mathcal{H}^1(A, B(F, E^*)) = \mathcal{H}^1(A, (F\widehat{\otimes}E)^*).$$

بنابراین، $\mathrm{Ext}^1_A(F, E^*) = \{0\}$ و این یعنی $E \in$ **A-mod** تخت چپ است. □

سئوال ۱. *اگر هر $E \in$ **A-mod** تخت چپ (تصویری چپ) باشد آیا A میانگین‌پذیر (انقباض‌پذیر) است؟*

سئوال فوق منسوب به هلمسکی است و نزدیک به ۴۰ سال یک سئوال باز می‌باشد. البته اخیرا در حالت‌های خاصی از جمله وقتی که $A = L^1(G)$، این سئوال توسط برخی از ریاضی‌دانان پاسخ داده شده است. برای دیدن برخی از کارهای انجام شده در این زمینه به مقالات [53] و [9] مراجعه نمائید.

فصل ۲
جبرهای باناخ تابعکی

۱.۲ معرفی

در این فصل همواره X یک فضای باناخ ناصفر و $X^{(n)}$ نشان دهنده n–امین دوگان توپولوژیکی از X برای هر عدد طبیعی n است.

قبل از پرداختن به تعاریف اصلی در این بخش ابتدا سئوال زیر را مطرح می‌نمائیم.

آیا X^*، دوگان فضای باناخ X یک جبر باناخ است؟ در اکثر موارد که این سئوال به ذهن اشخاص خطور می‌کند، معمولا اولین ضربی که برای تبدیل شدن این فضا به یک جبر در نظر می‌گیرند همان ضرب نقطه‌وار است. اما این ضرب روی X^* خوش تعریف نیست. پس باید ضرب دیگری را روی این فضا تعریف نمائیم که حداقل خوش تعریف باشد. در ادامه قصد داریم به سئوال فوق پاسخ دهیم. ما در این فصل روی هر فضای $X^{(n)}$ دو ضرب متفاوت تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که، با هر یک از این دو ضرب، $X^{(n)}$ یک جبر باناخ است. چون عناصر $X^{(n)}$ تابعک‌های خطی کراندار از $X^{(n-1)}$ به توی $\mathbb{C}$ هستند، این جبرها را جبرهای باناخ تابعکی می‌نامیم. سپس، به بررسی برخی از ویژگی‌های این دو جبر می‌پردازیم. ما در فصول بعدی این رساله از این جبر باناخ به عنوان منبعی برای مثال‌های نقض استفاده خواهیم کرد.

فرض کنیم $f \in X^{(n-1)}, F \in X^{(n+1)}$ عناصری ناصفر باشند که $n \in \mathbb{N}$، $||f|| \leq 1$ و $||F|| \leq 1$.

نگاشت‌های $\circ_f : X^{(n)} \times X^{(n)} \longrightarrow X^{(n)}$ و $\circ^F : X^{(n)} \times X^{(n)} \longrightarrow X^{(n)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$b_1 \circ_f b_2 = b_1(f)b_2, \quad b_1 \circ^F b_2 = F(b_1)b_2 \quad (b_1, b_2 \in X^{(n)}).$$

به وضوح نگاشت‌های فوق خوش تعریف هستند.

قضیه ۱.۱.۲. *برای هر $f \in X^{(n-1)}, F \in X^{(n+1)}$ که $||f|| \leq 1$ و $||F|| \leq 1$، $(X^{(n)}, \circ_f)$ و $(X^{(n)}, \circ^F)$ با نرم عملگری، دو جبر باناخ هستند.*

برهان. به ازای هر $b_۱, b_۲ \in X^{(n)}$، داریم:

$$||b_۱ \circ_f b_۲|| = ||b_۱(f)b_۲|| \leq ||b_۱||||b_۲||||f|| = ||b_۱||||b_۲||.$$

ادامه برهان ساده است و از بررسی نمودن جزئیات آن صرف‌نظر می‌کنیم. □

در ادامه فرض می‌کنیم که $B = X^{(n)}$ و از نمادگذاری‌های زیر برای نشان دادن دو جبر باناخ تابعکی فوق استفاده خواهیم کرد:

$$_fA(B) = (B, \circ_f), \quad A_F(B) = (B, \circ^F).$$

برای $f \in B_* = X^{(n-۱)}$ فرض کنیم $\hat{f} : B \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعکی خطی است که به صورت $\hat{f}(b) = b(f)$ تعریف شود. اگر $F = \hat{f}$ آنگاه $_fA(B) = A_F(B)$. بنابراین، اگر $\dim B_* < \infty$، آنگاه برای هر $F \in U_{B^*}$ که

$$U_{B^*} = \{F \in B^* : ||F|| \leq ۱\}$$

$_fA(B) = A_F(B)$ چون در این حالت B_* انعکاسی است. در حالت کلی قضیه گلدشتاین این دو جبر باناخ را به شکل زیر به یک‌دیگر مرتبط می‌کند.

فرض کنیم $F \in U_{F^*}$. در این صورت تور کراندار (f_α) در B_* وجود دارد به قسمی که $||f_\alpha|| \leq ||F||$ و $F = w^* - \lim_\alpha \hat{f}_\alpha$. بنابراین

$$b_۱ \circ^F b_۲ = F(b_۱)b_۲ = \lim_\alpha \widehat{f_\alpha}(b_۱)b_۲ = \lim_\alpha (b_۱ \circ_{f_\alpha} b_۲) \quad (b_۱, b_۲ \in B). \tag{۱.۲}$$

از این رو با سوء استفاده از نمادگذاری‌ها داریم، $A_F(B) = \lim_\alpha \ _{f_\alpha}A(B)$. رابطه ۱.۲ نشان می‌دهد که اگر برای هر α، جبر باناخ $_{f_\alpha}A(B)$ جابه‌جایی و یکدار باشد، جبر باناخ $A_F(B)$ نیز این گونه است.

در ادامه به بررسی این مطلب که چه وقت این دو جبر باناخ جابه‌جایی و یکدار هستند می‌پردازیم.

فرض کنیم $\text{supp}F$ تکیه‌گاه تابعک F است که به وضوح ناتهی است (چون F ناصفر است) و

$$E = \{b/F(b) : b \in \text{supp}F\}.$$

همچنین فرض کنیم $E_F = \text{conv}E$، غلاف محدب مجموعه E و $E_f = \{b \in B : b(f) = ۱\}$ است.

به وضوح مجموعه E_f ناتهی است، چون اگر برای هر $b \in B$، $b(f) = ۰$ آنگاه قضیه هان-باناخ[۱] نتیجه می‌دهد که $f = ۰$ و این تناقض با فرض ناصفر بودن f است. از این رو اسکالر ناصفر $\alpha \in \mathbb{C}$ وجود دارد به قسمی که $b(f) = \alpha$. در نتیجه b/α عضوی از مجموعه E_f است. اما برای هر $e_F \in E_F$ و $e_f \in E_f$ داریم،

$$e_F \circ^F b = b, \quad e_f \circ_f b = b \quad (b \in B).$$

بنابراین دو جبر باناخ $_fA(B)$ و $A_F(B)$ دارای همانی‌های چپ بسیاری هستند.

[۱] Hahn−Banach

قضیه ۲.۱.۲. *جبرهای باناخ $_fA(B)$ و $A_F(B)$ جابه‌جایی و یکدار هستند اگر و تنها اگر B یک فضای برداری یک بعدی باشد.*

برهان. ما اثبات را تنها برای $_fA(B)$ ارائه می‌دهیم. اثبات برای $A_F(B)$ مشابه حالت قبلی است.

فرض کنیم $B =< b >$ به قسمی که $||b|| = ۱$، یعنی B یک فضای باناخ تولید شده توسط عضو b است. بنا بر قضیه هان-باناخ داریم، $B_* =< f >$ به قسمی که $||f|| = ۱$ و $b(\alpha f) = \alpha$ برای هر اسکالر α. از این رو، b عضو واحد برای جبر باناخ $_fA(B)$ است. از سوی دیگر، برای هر $b_۱, b_۲ \in B$ اسکالرهای $\alpha_۱, \alpha_۲ \in \mathbb{C}$ وجود دارند که $b_۱ = \alpha_۱ b, b_۲ = \alpha_۲ b$. در نتیجه،

$$b_۱ \circ_f b_۲ = \alpha_۱\alpha_۲ b = \alpha_۲\alpha_۱ b = b_۲ \circ_f b_۱.$$

بنابراین $_fA(B)$ جابه‌جایی است.

حال فرض کنیم $_fA(B)$ یکدار است. از این رو $b' \in B_f(X)$ وجود دارد به قسمی که $||b'|| = ۱$ و

$$b' \circ_f b = b \circ_f b' = b \quad (b \in B). \tag{۲.۲}$$

اگر برای یک عضو ناصفر $b \in B$، $b(f) = ۰$ رابطه ۲.۲ نقض می‌شود. در نتیجه برای هر عضو ناصفر b از B اسکالر ناصفر α_b وجود دارد به قسمی که $b(f) = \alpha_b$. بنابراین، برای هر عضو ناصفر $b \in B$، با توجه به رابطه ۲.۲ داریم $b = \alpha_b b'$. در نتیجه B یک فضای باناخ یک‌بعدی است. □

۲.۲ برخی از خواص جبرهای تابعکی

در این بخش ابتدا برخی از خواص همانستگی این دو جبر باناخ، از قبیل میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری ضعیف را مورد بررسی قرار می‌هیم. سپس نشان می‌دهیم که این جبرها، آرنز منظم هستند. در پایان سعی می‌کنیم که فضای n-هم‌ریختی‌های این جبرها را برای هر $n \geq ۲$ توصیف نمائیم.

قضیه ۱.۲.۲. *فرض کنیم $f \in B_*$ و $F \in B^*$ عناصری هستند به قسمی که $||f|| = ۱, ||F|| = ۱$. در این صورت جبرهای باناخ $_fA(B)$ و $A_F(B)$ برای هر $m \in \mathbb{Z}^+$، $(۲m+۱)$-میانگین‌پذیر ضعیف هستند.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $b \in B$ و $b^{\{۲m\}} \in B^{(۲m)}$ داریم،

$$b \cdot b^{\{۲m\}} = b(f) b^{\{۲m\}}. \tag{۳.۲}$$

برای $m = ۰$ رابطه فوق برقرار است، چون در این حالت، عمل مدولی همان ضرب جبر باناخ $_fA(B)$ است. اگر $m = ۱$ برای $b^* \in B^*$ داریم،

$$b^* \cdot b(c) = b^*(b \circ_f c) = b(f) b^*(c) \quad (c \in B)\cdot \tag{۴.۲}$$

بنابراین $b^* \cdot b = b(f)b^*$. در نتیجه برای $b^{**} \in B^{**}$ داریم،

$$b \cdot b^{**}(b^*) = b^{**}(b^* \cdot b) = b^{**}(b(f)b^*) \quad (b^* \in B^*).$$

از این رو $b \cdot b^{**} = b(f)b^{**}$. حال فرض کنیم رابطه ۳.۲ برای $m = k$ برقرار است. نشان می‌دهیم برای $m = k + ۱$ نیز برقرار است. برای $b^{\{k+۱\}} \in B^{(k+۱)}$ داریم،

$$b \cdot b^{\{۲k+۲\}}(b^{\{۲k+۱\}}) = b^{\{۲k+۲\}}(b^{\{۲k+۱\}} \cdot b) \quad (b^{\{۲k+۱\}} \in B^{(۲k+۱)}).$$

حال مشابه با رابطه ۴.۲ داریم، $b^{\{۲k+۱\}} \cdot b = b(f)b^{\{۲k+۱\}}$. بنابراین، به استقراء، رابطه ۳.۲ بدست می‌آید.

فرض کنیم $\phi : {}_fA(B) \longrightarrow \mathbb{C}$ نگاشت ارزیاب در f باشد، یعنی $\phi(b) = b(f)$. از قضیه هان-باناخ نتیجه می‌گیریم که $m \in ({}_fA(B))^{**}$ وجود دارد به قسمی که $m(\phi) = ۱$. در نتیجه هر اشتقاق پیوشته $D : {}_fA(B) \longrightarrow B^{(۲m+۱)}$ طبق قضیه ۳.۴.۱، یک اشتقاق درونی است. پس ${}_fA(B)$ ، $(۲m + ۱)$-میانگین‌پذیر ضعیف است.

برای جبر باناخ $A_F(B)$ نیز فرض کنیم $\phi \in \Delta(A_F(B))$ به صورت $\phi(b) = F(b)$ تعریف شده است. در این صورت مشابه با حالت قبل، از قضیه هان-باناخ نتیجه می‌شود که یک ϕ-میانگین روی $A_F(B)^*$ وجود دارد و همچنین

$$b \cdot b^{\{۲m\}} = F(b)b^{\{۲m\}} \quad (b \in B).$$

بنابراین، $A_F(B)$ نیز $(۲m + ۱)$-میانگین‌پذیر ضعیف است. □

قضیه ۲.۲.۲. *برای هر $f \in B_*$ با $||f|| \leq ۱$، جبر باناخ ${}_fA(B)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $\dim B_* = ۱$.*

برهان. فرض کنیم $\dim B_* = ۱$. از این رو، $\dim(B_*)^* = \dim B = ۱$. فرض کنیم $B =< b >$ به قسمی که $b(f) = ۱$. به وضوح بررسی می‌شود که $b \otimes b$ یک قطر تقریبی کراندار برای ${}_fA(B)$ است. بنابراین ${}_fA(B)$ میانگین‌پذیر است.

برعکس، فرض کنیم ${}_fA(B)$ میانگین‌پذیر است ولی $\dim B_* > ۱$. می‌دانیم که هر جبر باناخ میانگین‌پذیر دارای یک همانی تقریبی کراندار است. فرض کنیم (b_α) یک همانی تقریبی کراندار برای ${}_fA(B)$ است. بنابراین

$$||b_\alpha \circ_f b - b||, \quad ||b \circ_f b_\alpha - b|| \longrightarrow ۰ \quad (b \in B). \tag{۵.۲}$$

حال فرض کنیم $M =< f, f' >$، یعنی M زیر فضای خطی از B_* تولید شده توسط f, f' باشد. به وضوح نگاشت $b' : M \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه

$$b'(\gamma_۱ f + \gamma_۲ f') = \gamma_۲ ||f'|| \quad (\gamma_۱, \gamma_۲ \in \mathbb{C}),$$

یک تابعک خطی کراندار روی M است. از این رو قضیه هان-باناخ نتیجه می‌دهد که تابعک خطی و کراندار $b \in B$ وجود دارد به قسمی که $b_{|M} = b'$ و $||b|| = ||b'||$. اما $b(f) = ۰$ و $b \neq ۰$. بنابراین، رابطه ۵.۲ برای هر $b \in B$ برقرار نیست. پس $\dim B_* = ۱$.

نتیجه ۱.۲.۲. *اگر* $\dim B_* > ۱$ *برای هر* $F \in \widehat{U_{B_*}}$، $A_F(B)$ *میانگین‌پذیر نیست.*

برهان. چون $F \in \widehat{U_{B_*}}$، پس $f \in U_{B_*}$ وجود دارد به قسمی که $F = \hat{f}$. بنابراین، $_fA(B) = B_F(B)$ و نتیجه از قضیه ۲.۲.۲ حاصل می‌شود. □

در حالتی که $\dim B_* = \infty$ و $F \in U_{B^*} \setminus \widehat{U_{B_*}}$ در مورد میانگین‌پذیری $A_F(B)$ چه می‌توان گفت؟

قضیه ۳.۲.۲. *فرض کنیم* $\dim B_* = \infty$. *در این صورت برای هر* $F \in U_{B^*}$، *جبر باناخ* $A_F(B)$ *میانگین‌پذیر نیست.*

برهان. فرض کنیم جبر باناخ $A_F(B)$ میانگین‌پذیر و (b_α) یک همانی تقریبی کراندار از آن است. از این رو

$$||b_\alpha \circ^F b - b||, ||b \circ^F b_\alpha - b|| \longrightarrow ۰ \quad (b \in B). \tag{۶.۲}$$

اگر برای یک عضو ناصفر $b \in B$، $F(b) = ۰$، آنگاه با توجه به رابطه فوق به یک تناقض می‌رسیم و برهان تمام می‌شود. در غیر این صورت نشان می‌دهیم که وجود این همانی تقریبی کراندار، متناقض با نامتناهی بعد بودن B_* است.

فرض کنیم (c_γ) یک تور در مجموعه $C = \{c \in B : ||c|| = ۱\}$ است. با توجه به رابطه ۶.۲، برای هر γ داریم، $c_\gamma = \lim_\alpha F(c_\gamma) b_\alpha$. بنابراین $\lim_\alpha b_\alpha$ وجود دارد و برابر است با $c_\gamma / F(c_\gamma)$. حال چون $(F(c_\gamma))$ یک مجموعه کراندار در $\mathbb{C}$ است، قضیه بولتسانو-وایراشتراس[۲] نتیجه می‌دهد که $(F(c_\gamma))$ دارای یک زیر تور همگرای $(F(c_{\gamma_w}))$ است.

به وضوح زیر تور (c_{γ_w}) در مجموعه C همگراست. بنابراین قضیه هاینه-بورل نتیجه می‌دهد که B و از این رو B_* متناهی بعد است. پس جبر باناخ $A_F(B)$ میانگین‌پذیر نیست. □

در قضیه بعد نشان می‌دهیم که دو جبر باناخ $_fA(B)$ و $A_F(B)$ آرنز منظم هستند.

قضیه ۴.۲.۲. *دو جبر باناخ* $_fA(B)$ *و* $A_F(B)$ *آرنز منظم می‌باشند.*

برهان. فرض کنیم $b_۱^{**}, b_۲^{**} \in (A_F(B))^{**}$. از این رو تورهای $(b_\alpha^۱), (b_\beta^۲)$ در $A_F(B)$ وجود دارند به قسمی که،

$$b_۱^{**} = w^* - \lim_\alpha \widehat{b_\alpha^۱}, \quad b_۲^{**} = w^* - \lim_\beta \widehat{b_\beta^۲}.$$

بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} b_۱^{**} \Box b_۲^{**} &= w^* - \lim_\alpha w^* - \lim_\beta \widehat{b_\alpha^۱ \circ^F b_\beta^۲} \\ &= \lim_\alpha w^* - \lim_\beta F(b_\alpha^۱) \widehat{b_\beta^۲} \\ &= b_۱^{**}(F)(w^* - \lim_\beta \widehat{b_\beta^۲}) \\ &= b_۱^{**}(F) b_۲^{**}. \end{aligned}$$

[۲] Bolzano–Weierstrass

از سوی دیگر داریم،

$$\begin{aligned} b_1^{**}\Diamond b_2^{**} &= w^* - \lim_\beta w^* - \lim_\alpha \widehat{b_\alpha^1 \circ^F b_\beta^2} \\ &= w^* - \lim_\beta \lim_\alpha F(b_\alpha^1)\widehat{b_\beta^2} \\ &= b_1^{**}(F)(w^* - \lim_\beta \widehat{b_\beta^2}) \\ &= b_1^{**}(F)b_2^{**}. \end{aligned}$$

بنابراین، $b_1^{**}\Diamond b_2^{**} = b_1^{**}\Box b_2^{**}$ و این یعنی جبر باناخ $A_F(B)$ آرنز منظم است.

برای اینکه نشان دهیم جبر باناخ ${}_fA(B)$ آرنز منظم است، با توجه به [7, Theorem 2.6.17(d)] نشان می‌دهیم که برای هر $g \in {}_fA(B)^*$ نگاشت $T_g : {}_fA(B) \longrightarrow {}_fA(B)^*$ با ضابطه $T_g(b) = g\Box b$ به طور ضعیف فشرده است.

اما برای هر $c \in {}_fA(B)$ داریم،

$$(g\Box b)(c) = g(b \circ_f c) = g(b(f)c) = b(f)g(c).$$

بنابراین، $T_g(b) = b(f)g$. حال فرض کنیم که (b_α) یک تور کراندار در ${}_fA(B)$ است. اگر نشان دهیم که $(T_g(b_\alpha))$ دارای یک زیر تور به طور ضعیف همگراست، اثبات کامل می‌شود.

اما می‌دانیم که تور $(b_\alpha(f))$ در $\mathbb{C}$ کراندار است. از این رو طبق قضیه بولتسانو-وایراشتراس دارای زیر تور همگرای $(b_{\alpha_w}(f))$ است. به وضوح قابل بررسی است که زیر تور $(T_g(b_{\alpha_w}))$ در ${}_fA(B)^*$ به طور ضعیف همگراست. $\Box$

قضیه ۵.۲.۲. *فرض کنیم m یک عدد طبیعی است. در این صورت داریم،*

$$\Delta_{2n}(A_F(B)) = \{F\}, \Delta_{2n+1}(A_F(B)) = \{F, -F\},\ \Delta_{2n}({}_fA(B)) = \{\hat{f}\}, \Delta_{2n+1}({}_fA(B)) = \{\hat{f}, -\hat{f}\}.$$

برهان. فرض کنیم $\phi \in \Delta_{2n+1}(A_F(B))$. نشان می‌دهیم که $\phi = F$ و یا $\phi = -F$. فرض کنیم $b_0 \in B$ عضوی است که $F(b_0) = 1$ و $c \in B$ به‌گونه‌ای انتخاب شود که $\phi(c) \neq 0$. از این رو برای هر $b \in B$ داریم،

$$F(b)\phi(c) = \phi(b \circ^F \overbrace{b_0 \circ^F \ldots \circ^F b_0}^{2n-1} \circ^F c) = \phi(b)\phi(b_0)^{2n-1}\phi(c).$$

بنابراین، $F(b) = \phi(b)\phi(b_0)^{2n-1}$ برای هر $b \in B$. اما

$$\phi(b_0) = \phi(\overbrace{b_0 \circ^F b_0 \circ^F \ldots \circ^F b_0}^{2n+1}) = \phi(b_0)^{2n+1}.$$

در نتیجه، $\phi(b_0)$ یکی از سه مقدار $-1, 0, 1$ را اختیار می‌کند. اما $\phi(b_0)$ برابر با صفر نمی‌شود، چون در این صورت F برابر با تابع ثابت صفر خواهد شد که متناقض با فرض است. از این رو $\phi(b_0) = 1$ و یا $\phi(b_0) = -1$. بنابراین $\phi = F$ و یا $\phi = -F$. بررسی سایر موارد نیز مشابه با برهان اخیر است. $\Box$

نکات و برخی از ملاحظات تاریخی

جبر باناخ تابعکی $A_F(B)$ در حالت خاص $B = X^{(\circ)} = X$ توسط بسیاری از افراد بررسی و مورد استفاده قرار گرفته است. به عنوان مثال، ژانگ در [66]، با استفاده از این ساختار، جبر باناخی ارائه داده است که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(۲n - ۱)$-میانگین‌پذیر ضعیف است ولی $(۲n)$-میانگین‌پذیر ضعیف نیست. اما در اینجا، تمرکز ما روی $X^{(n)}$ است و روشهای استفاده شده در برهان‌ها، کاملا با روشهای دیگران متمایز است.

برای دیدن برخی از مقالات در این زمینه به مراجع [1] و [40] مراجعه نمائید. □

فصل ۳

سرشت میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ

۱.۳ مقدمه

در سال ۲۰۰۸ میلادی، کنیوث، لائو و پیم مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری جبر باناخ A و در همین سال سنگانی منفرد مفهوم سرشت میانگین‌پذیری را، به عنوان تعمیمی از میانگین‌پذیری جبرهای باناخ که توسط جانسون در سال ۱۹۷۲ معرفی گردید، ارائه نمودند.

از سوی دیگر، در سال ۱۹۷۷، جونز و لاهر مفهوم همانی تقریبی Δ-ضعیف را ارائه و به مطالعه و بررسی ارتباط این مفهوم با همانی‌های تقریبی پرداختند. آنها با استفاده از جبرهای نیم‌گروهی، جبر باناخی ارائه کردند که دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است ولی هیچ همانی تقریبی (کراندار و یا بی‌کران) ندارد. در مورد این نوع از همانی‌های تقریبی سئوالات مهم بسیاری وجود دارند که هنوز پاسخ صریحی به آنها داده نشده است. به عنوان مثال می‌دانیم که هر جبر باناخ A که دارای یک همانی تقریبی کراندار است، طبق قضیه تجزیه‌شدنی کوهن[۱]، تجزیه می‌گردد؛ یعنی، برای هر $a \in A$ عناصر $b, c \in A$ موجودند به قسمی که $a = bc$. اما در مورد همانی‌های تقریبی کراندار Δ-ضعیف، تا آنجا که ما در مطالعات و بررسی‌های خود بدست آوردیم، قضیه کوهن و یا شکلی خاصی از آن، تاکنون بیان نشده است (ولی حدس می‌زنیم که قضیه کوهن در این حالت برقرار نیست). بعد از گذشت چند سال از ارائه شدن این مفهوم، فارست[۲] در سال ۱۹۹۴، به مطالعه ایده‌الهای جبر فوریه که دارای این نوع همانی تقریبی هستند پرداخت و نتایج جالبی را نیز بدست آورد. همچنین در سال ۲۰۱۰ کنیوث و اولگر[۳] نیز به مطالعه این همانی تقریبی پرداختند و نتایجی روی جبرهای فوریه و فوریه-استیلت‌یس[۴] را کسب نمودند. اخیرا نیز دلز و اولگر در حال تلاش هستند که بتوانند صورتی از قضیه کوهن، برای این همانی‌های تقریبی کراندار را فرمول‌بندی نمایند(ایشان در کارگاه آنالیز هارمونیک، تابعی و جبرهای عملگری که در سال ۲۰۱۴ در موسسه فیلدز[۵] در تورنتو کانادا برگزار گردید، این مطلب را بیان کردند و بخشی از نتایج بدست آمده و سئوالات مطرح شده را در قالب یک فایل پی-دی-اف در صفحات اینترنت برای استفاده همگان قرار داده‌اند).

---

[۱] Cohen [۲] Forrest [۳] Ülger [۴] Stieltjes [۵] Fields

در این فصل با استفاده از نظریه همانی‌های تقریبی Δ-ضعیف، تعمیمی از مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری برای جبرهای باناخی که دارای یک همانی تقریبی راست باشند را ارائه می‌دهیم. سپس در ادامه به بررسی چند خاصیت موروثی از این مفهوم پرداخته و چند نتیجه از این مفهوم روی جبرهای گروهی، فیگا-تالامانکا-هرتس، لبگ-فیگا-تالامانکا-هرتس و جبرهای تابعی وزن‌دار بدست می‌آوریم. همچنین نشان می‌دهیم که عکس قضیه هلمسکی در حالتی که مفهوم میانگین‌پذیری را با ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف عوض نمائیم، برقرار است. در پایان در یک بخش مجزا، تنها به ذکر مثال‌های متنوع در رابطه با این مفهوم و تمایز آن با مفاهیم دیگر می‌پردازیم.

۲.۳ حالتی خاص از ϕ-میانگین‌پذیری جبرهای باناخ

این بخش را با تعریف ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف آغاز می‌نمائیم.

تعریف ۱.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\phi \in \Delta(A) \cup \{0\}$. می‌گوئیم جبر باناخ A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر $m \in A^{**}$ وجود داشته باشد به قسمی که $m(\phi) = 0$ و*

$$m(\psi \cdot a) = \psi(a) \quad (a \in \ker(\phi), \psi \in \Delta(A)).$$

در قضیه بعد به توصیف مفهوم ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\phi \in \Delta(A) \cup \{0\}$. در این صورت A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر $\ker(\phi)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف باشد.*

برهان. فرض کنیم (e_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای $\ker(\phi)$ است. بنابراین $(\widehat{e_\alpha})$ یک تور کراندار در A^{**} می‌باشد. از این رو قضیه باناخ-آل‌اوغلو نتیجه می‌دهد که $(\widehat{e_\alpha})$ زیر مجموعه یک مجموعه فشرده با توپولوژی ضعیف ستاره در A^{**} است و در نتیجه دارای یک نقطه حدی در این توپولوژی است.

فرض کنیم $m = w^* - \lim_\alpha \widehat{e_\alpha}$. بنابراین داریم،

$$m(\phi) = \lim_\alpha \widehat{e_\alpha}(\phi) = \lim_\alpha \phi(e_\alpha) = 0,$$

و برای هر $\psi \in \Delta(A)$ و $a \in \ker(\phi)$،

$$m(\psi \cdot a) = \lim_\alpha \widehat{e_\alpha}(\psi \cdot a) = \lim_\alpha \psi \cdot a(e_\alpha) = \lim_\alpha \psi(ae_\alpha) = \psi(a).$$

برعکس، فرض کنیم $m \in A^{**}$ وجود دارد به قسمی که $m(\phi) = 0$ و

$$m(\psi \cdot a) = \psi(a) \quad (\psi \in \Delta(A), a \in \ker(\phi)).$$

چون $m \in A^{**}$، قضیه گلدشتاین نتیجه می‌دهد که تور (e_α) در A وجود دارد به قسمی که $m = w^* - \lim_\alpha \widehat{e_\alpha}$ و برای هر α، $||e_\alpha|| \leq ||m||$. بنابراین تور (e_α) کراندار است و برای هر $\psi \in \Delta(A)$ و $a \in \ker(\phi)$ داریم،

$$\begin{aligned}\psi(a) = m(\psi \cdot a) &= \lim_\alpha \widehat{e_\alpha}(\psi \cdot a)\\ &= \lim_\alpha \psi \cdot a(e_\alpha)\\ &= \lim_\alpha \psi(ae_\alpha).\end{aligned}$$

از این رو، $\lim_\alpha |\psi(ae_\alpha) - \psi(a)| = \circ$.

توجه می‌کنیم که تور (e_α) زیر مجموعه $\ker(\phi)$ نیست. برای ساختن یک تور در $\ker(\phi)$ با شرایط مورد نظر دوحالت داریم، $\phi = \circ$ یا $\phi \in \Delta(A)$. اگر $\phi = \circ$ به وضوح (e_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای $A = \ker(\phi)$ است.

اگر $\phi \in \Delta(A)$، $x_\circ \in A$ وجود دارد به قسمی که $\phi(x_\circ) \neq \circ$. قرار می‌دهیم $a_\circ = \frac{x_\circ}{\phi(x_\circ)}$ و فرض می‌کنیم، برای هر α، $a_\alpha = e_\alpha - \phi(e_\alpha)a_\circ$. به سادگی بررسی می‌شود که (a_α) یک تور کراندار در $\ker(\phi)$ است. از سوی دیگر چون $m(\phi) = \circ$ داریم، $\lim_\alpha \phi(e_\alpha) = \circ$. در نتیجه،

$$\begin{aligned}\lim_\alpha |\psi(aa_\alpha) - \psi(a)| &= \lim_\alpha |\psi(ae_\alpha) - \phi(e_\alpha)\psi(a_\circ) - \psi(a)|\\ &\leq \lim_\alpha |\psi(ae_\alpha) - \psi(a)| + \lim_\alpha |\phi(e_\alpha)\psi(a_\circ)|\\ &= \lim_\alpha |\psi(ae_\alpha) - \psi(a)| = \circ \qquad (a \in \ker(\phi), \psi \in \Delta(A)).\end{aligned}$$

بنابراین، (a_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای $\ker(\phi)$ است و این برهان را کامل می‌کند. □

با توجه به قضایای ۱.۲.۳ و ۴.۴.۱ نتیجه بعدی حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر باشد که دارای یک همانی تقریبی راست کراندار است. در این صورت A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

چون هر جبر باناخ میانگین‌پذیر دارای یک همانی تقریبی کراندار است نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

نتیجه ۲.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ میانگین‌پذیر با فضای سرشت‌های ناتهی است. در این صورت به ازای هر $\phi \in \Delta(A) \cup \{\circ\}$، A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

نکته ۶. *می‌دانیم که $\circ$-میانگین‌پذیری جبر باناخ A، نتیجه می‌دهد که A دارای یک همانی تقریبی کراندار است [39]. مشابه با گزاره اخیر، با توجه به قضیه ۱.۲.۳، $\circ$-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف جبر باناخ A نیز نتیجه می‌دهد که A دارای یک همانی تقریبی Δ-ضعیف کراندار است.*

نکته ۷. *فرض کنیم A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف و (e_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای $\ker(\phi)$ است. اگر $a_\circ \in A$ وجود داشته باشد به قسمی‌که $\phi(a_\circ) = 1$ و به ازای هر $\psi \in \Delta(A) \setminus \{\phi\}$، $\lim_\alpha |\psi(a_\circ e_\alpha) - \psi(a_\circ)| = 0$، آنگاه $m \in A^{**}$ وجود دارد به قسمی‌که $m(\phi) = 0$ و*

$$m(\psi \cdot a) = \psi(a) \quad (a \in A, \psi \in \Delta(A) \setminus \{\phi\}). \tag{۱.۳}$$

اثبات وجود m همانند اثبات وجود m در قضیه ۱.۲.۳، انجام می‌شود. برای اثبات قسمت دوم، به وضوح برای هر $a \in A$، $a - \phi(a)a_\circ$ عضوی است از $\ker(\phi)$. بنابراین برای هر $\psi \in \Delta(A \setminus \{\phi\}$ داریم،

$$m(\psi \cdot (a - \phi(a)a_\circ)) = \psi(a - \phi(a)a_\circ).$$

بنابر رابطه اخیر و استفاده از فرض، نتیجه می‌گیریم‌که $m(\psi \cdot a) = \psi(a)$.

توجه می‌کنیم که در رابطه ۱.۳ شرط $\psi \neq \phi$ ضروری است. چون اگر $\psi = \phi$، داریم $m(\phi \cdot a) = \phi(a)$. از سوی دیگر $a \in A$ وجود دارد به قسمی که $\phi(a) \neq 0$. همچنین می دانیم که $\phi \cdot a = \phi(a)\phi$. بنابراین داریم،

$$\phi(a) = m(\phi \cdot a) = m(\phi(a)\phi) = \phi(a)m(\phi).$$

پس، $m(\phi) = 1$ و این متناقض با فرض $m(\phi) = 0$ است.

اثبات لم بعدی، مشابه با بخشی از برهان [37, Theorem 3.3.14] است.

لم ۲.۲.۳. *فرض‌کنیم A یک جبر باناخ است و $\phi, \psi \in \Delta(A)$ متمایز با یک‌دیگر هستند. در این صورت $a \in A$ وجود دارد به قسمی‌که $\phi(a) = 0$ و $\psi(a) = 1$.*

برهان. فرض کنیم x عضوی از A باشد به قسمی که $\phi(x) \neq \psi(x)$. اگر $\phi(x) = 0$ اثبات با قرار دادن $a = \frac{x}{\psi(x)}$ کامل می‌شود. در غیر این صورت بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $\phi(x) = 1$. از این رو $\psi(x) \neq 1$. به علاوه اگر $\psi(x) \neq 0$ قرار می‌دهیم، $a = \frac{x-x^2}{\psi(x-x^2)}$. آنگاه $\phi(a) = 0$ و $\psi(a) = 1$.

در حالتی که $\psi(x) = 0$، $y \in A$ را به قسمی در نظر می‌گیریم که $\psi(y) \neq 0$. اگر $\phi(y) = 0$ قرار می‌دهیم، $a = \frac{y}{||y||}$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم، $a = \frac{x-y/\phi(y)}{\psi(x-y/\phi(y))}$. به وضوح در این حالات $\phi(a) = 0$ و $\psi(a) = 1$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه بعدی یکی از ابزار تولید جبرهای باناخ ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.

قضیه ۳.۲.۳. *فرض‌کنیم A یک جبر باناخ باشد به قسمی‌که $\Delta(A)$ دارای یک و یا دو عضو است. در این صورت برای هر $\phi \in \Delta(A)$، جبر A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

برهان. اگر $\Delta(A) = \{\phi\}$، تنها یک عضو $e \in \ker(\phi)$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم، $m = \widehat{e}$. در صورتی که $\Delta(A) = \{\phi, \psi\}$، طبق لم ۲.۲.۳، $a \in \ker(\phi)$ وجود دارد به قسمی که $\psi(a) = ۱$. در این حالت نیز قرار می‌دهیم، $m = \widehat{a}$. □

نکته ۸. *اگر A یک جبر باناخ باشد به قسمی که $\Delta(A) \setminus \{\phi\} \neq \emptyset$، آنگاه A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر تور کراندار (e_α) در $\ker(\phi)$ موجود باشد به قسمی که*

$$\lim_\alpha \psi(e_\alpha) = ۱ \quad (\psi \in \Delta(A) \setminus \{\phi\}).$$

همچنین A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر $m \in A^{**}$ وجود داشته باشد به قسمی که $m(\phi) = ۰$ و $m(\psi) = ۱$ برای هر $\psi \in \Delta(A) \setminus \{\phi\}$. روابط فوق از لم ۲.۲.۳ و این نکته که برای هر $\psi \in \Delta(A)$ و $a \in A$، $\psi \cdot a = \psi(a)\psi$ نتیجه می‌گردند.

در ادامه نشان می‌دهیم که هر جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف، دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است. بنا به [13, Proposition 7.1]، اگر A یک جبر باناخ و I یک ایده‌ال بسته و دوطرفه از A باشد به قسمی که $I, \frac{A}{I}$ دارای همانی تقریبی چپ کراندار باشند، آنگاه A دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار است.

در قضیه زیر حالتی از گزاره اخیر را برای همانی‌های تقریبی کراندار Δ-ضعیف ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و I یک ایده‌ال بسته و دوطرفه از A است که دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است و جبر خارج قسمتی A/I نیز دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار می‌باشد. در این صورت A دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است.*

برهان. فرض کنیم (e_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای I با کران بالای M و $(f_\delta + I)$ یک همانی تقریبی چپ کراندار $\frac{A}{I}$ است. همچنین برای $m \in \mathbb{N}$ فرض می‌کنیم $F = \{a_۱, ..., a_m\}$ و n یک عدد طبیعی دلخواه است.

برای $\lambda = (F, n)$، f_{δ_λ} وجود دارد به قسمی که،

$$||f_{\delta_\lambda} a_i - a_i + I|| < \frac{۱}{۲(۱ + M)n} \quad (i = ۱, ۲, ۳, ..., m).$$

با توجه به خواص نرم خارج قسمتی، $y_i \in I$ وجود دارد به قسمی که،

$$||f_{\delta_\lambda} a_i - a_i + y_i|| < \frac{۱}{۲(۱ + M)n} \quad (i = ۱, ۲, ۳, ..., m). \tag{۲.۳}$$

فرض کنیم $\psi \in \Delta(A)$ عضوی دلخواه است. چون (e_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای I است، برای هر y_i که $i \in \{۱, ۲, ۳, ..., m\}$ و در رابطه ۲.۳ صدق می‌کند، e_{α_λ} وجود دارد به قسمی که،

$$|\psi(e_{\alpha_\lambda} y_i) - \psi(y_i)| < \frac{۱}{۲n} \quad (i = ۱, ۲, ۳, ..., m).$$

حال برای هر $i \in \{۱, ۲, ۳, ..., m\}$ داریم،

$$\begin{aligned}|\psi((e_{\alpha_\lambda} + f_{\delta_\lambda} - e_{\alpha_\lambda} f_{\delta_\lambda})a_i) - \psi(a_i)| &\leq |\psi(f_{\delta_\lambda} a_i - a_i + y_i)| \\ &+ |\psi(e_{\alpha_\lambda} y_i) - \psi(y_i)| \\ &+ |\psi(e_{\alpha_\lambda} a_i - e_{\alpha_\lambda} f_{\delta_\lambda} a_i - e_{\alpha_\lambda} y_i)| \\ &\leq ||f_{\delta_\lambda} a_i - a_i + y_i|| \\ &+ \frac{۱}{۲n} + M||a_i - f_{\delta_\lambda} a_i - y_i|| \\ &< \frac{۱}{n}.\end{aligned}$$

بنابراین $\{e_{\alpha_\lambda} + f_{\delta_\lambda} - e_{\alpha_\lambda} f_{\delta_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ یک همانی تقریبی Δ-ضعیف برای A است که در آن

$$\Lambda = \{(F, n) : \text{متناهی } F \subseteq A, n \in \mathbb{N}\},$$

یک مجموعه جهت‌دار با $(F_۱, n_۱) \leq (F_۲, n_۲)$ اگر $F_۱ \subseteq F_۲$ و $n_۱ \leq n_۲$ است.

در ادامه نشان می‌دهیم که یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای A وجود دارد. چون $(f_\delta + I)$ یک همانی تقریبی کراندار چپ است، ثابت $K > ۰$ وجود دارد به قسمی که برای هر δ، $||f_\delta + I|| \leq K$. بنابراین $y_\delta \in I$ وجود دارد به قسمی که،

$$||f_\delta + I|| < ||f_\delta + y_\delta|| < K.$$

قرار می‌دهیم $f'_\delta = f_\delta + y_\delta$. از این رو $(f'_\delta + I)$ یک همانی تقریبی کراندار برای A/I است به قسمی که (f'_δ) کراندار است. در نتیجه،

$$||e_{\alpha_\lambda} + f'_{\delta_\lambda} - e_{\alpha_\lambda} f'_{\delta_\lambda}|| \leq ||e_{\alpha_\lambda}|| + ||f'_{\delta_\lambda}|| + ||e_{\alpha_\lambda}||||f'_{\delta_\lambda}|| < M + K + KM.$$

بنابراین A دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است. □

نتیجه ۳.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $\phi \in \Delta(A) \cup \{۰\}$. اگر A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد، در این صورت، A دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است .*

برهان. اگر $\phi = ۰$ حکم بدیهی است. در غیر این صورت چون A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است، طبق قضیه ۱.۲.۳، $\ker(\phi)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است. از طرفی جبر خارج قسمتی $\frac{A}{\ker(\phi)}$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است، چون بعد آن برابر با یک می‌باشد. حال نتیجه با استفاده از قضیه ۴.۲.۳ حاصل می‌گردد. □

نتیجه ۴.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $\phi \in \Delta(A)$. اگر A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد، در این صورت، A ۰-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

برهان. حکم بنا بر نتیجه ۳.۲.۳ به‌دست می‌آید. □

در بخش مثال‌ها خواهیم دید که عکس نتیجه فوق برقرار نیست، یعنی جبر باناخی وجود دارد که ۰-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اما ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف نیست (مراجعه کنید به مثال ۷). پس عکس نتیجه ۳.۲.۳ نیز برقرار نمی‌باشد.

نکته ۹. *جبرهای باناخی وجود دارند که همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف ندارند. به عنوان مثال، فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است و $1 < p < \infty$. قرار می‌دهیم،*

$$S_p(G) = L^1(G) \cap L^p(G).$$

به وضوح $S_p(G)$ با نرم $||f||_{S_p(G)} = \max\{||f||_1, ||f||_p\}$ یک جبر سگال است. از طرفی، می‌دانیم که $S_p(G)$ یک BSE-جبر است اگر و تنها اگر G فشرده نباشد [33, Corollary 2.4].

بنابراین، با استفاده از این مطلب و قضیه ۱۱.۲.۱ نتیجه می‌شود که اگر G یک گروه آبلی فشرده و نامتناهی باشد، آنگاه جبر $S_p(G)$ دارای هیچ همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیفی نیست. به عنوان مثالی از یک گروه آبلی، فشرده و نامتناهی می‌توانیم دایره یکه $\mathbb{T}$ با عمل ضرب را در نظر بگیریم.

همچنین در [36, Corollary 4.5] *جبرهای باناخ خاصی (زیر جبرهای سگال از $L^1(\mathbb{R})$) ارائه شده‌اند که دارای هیچ همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیفی نیستند.*

حالتی خاص از عضو همانی در یک جبر باناخ وجود دارد که در ادامه آن را معرفی خواهیم نمود.

تعریف ۲.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است. می‌گوئیم $e \in A$ یک همانی Δ-ضعیف برای A است اگر برای هر $\phi \in \Delta(A)$، $\phi(e) = 1$ و یا به طور معادل*

$$\phi(ea) = \phi(a) \quad (a \in A, \phi \in \Delta(A)).$$

به وضوح هر همانی از جبر باناخ A یک همانی Δ-ضعیف برای A است اما عکس آن در حالت کلی برقرار نیست. یکی از تفاوت‌های اصلی همانی و همانی Δ-ضعیف در یک جبر باناخ این است که عضو همانی یکتا است ولی عضو همانی Δ-ضعیف در حالت کلی یکتا نیست.

نکته ۱۰. *قابل توجه است که جبرهای باناخی وجود دارند که همانی Δ-ضعیف ندارند. به عنوان مثال $A = C_0(\mathbb{R})$ با فضای سرشت‌های $\mathbb{R}$ دارای همانی Δ-ضعیف نیست، چون اگر $f \in C_0(\mathbb{R})$ یک همانی Δ-ضعیف باشد داریم،*

$$1 = \phi_x(f) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

بنابراین $f = 1$ که این غیر ممکن است.

قضیه بعدی یک شرط لازم برای ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف جبرهای باناخ متناهی بعد را فراهم می‌کند.

قضیه ۵.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ متناهی بعد است و $\phi \in \Delta(A) \cup \{0\}$. اگر A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد، در این صورت، A دارای یک همانی Δ-ضعیف است.*

برهان. فرض کنیم A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. از این رو بنا به نتیجه ۳.۲.۳، جبر باناخ A دارای یک همانی تقریبی کراندار -ضعیف (e_α) است.

چون مجموعه (e_α) کراندار است، قضیه هاینه-بورل نتیجه می‌دهد که بستار این مجموعه فشرده می‌باشد، چون کراندار و بسته است. از این رو (e_α) دارای یک زیر تور همگرا است که مجدد آن را با (e_α) نشان می‌دهیم که به $e \in A$ همگرا است. بنابراین برای هر $\psi \in \Delta(A)$ و $a \in A$ داریم،

$$\psi(ea) = \lim_{\alpha} \psi(e_\alpha a) = \psi(a).$$

در نتیجه $e \in A$ یک همانی Δ-ضعیف برای A است. □

هر $\phi \in \Delta(A)$ به سرشت $\widehat{\phi}$ از A^{**} که با ضرب اول آرنز تجهیز شده و به صورت

$$\widehat{\phi}(a^{**}) = a^{**}(\phi) \quad (a^{**} \in A^{**}),$$

تعریف می‌شود، توسیع می‌یابد.

قضیه بعد یک شرط کافی برای ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف جبر باناخ A با استفاده از مفاهیم مانستگی را محیا می‌کند.

قضیه ۶.۲.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\phi \in \Delta(A)$. اگر $\ker(\widehat{\phi}) \in$ **mod-A** انژکتیو باشد، آنگاه A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

برهان. بنا به [7, Theorem A.3.48] می‌دانیم که $\ker(\widehat{\phi}) = \ker(\phi)^{**}$. حال چون $\ker(\phi)$ از هم‌بعد یک است، بنا بر [58, Lemma 4.21(b)] در A مکمل می‌شود. از این رو حکم از قسمت (ت) قضیه ۶.۴.۱ و قضیه ۱.۲.۳ بدست می‌آید. □

قضیه فوق در واقع یک جواب جزیی به سئوال حل نشده هلمسکی است. در واقع قضیه فوق بیان می‌کند که اگر $(\ker(\phi))^* \in$ **A-mod** تخت باشد آنگاه A، ϕ-میانگین پذیر Δ-ضعیف است.

در مثال ۹ بخش بعد نشان می‌دهیم که عکس قضیه فوق در حالت کلی برقرار نیست و این نتیجه می‌دهد که دو مفهوم میانگین‌پذیری و ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف با یک‌دیگر متمایز هستند.

۳.۳ برخی از ویژگی‌های موروثی

با استفاده از یک هم‌ریختی پیوسته با برد چگال از جبر باناخ A به توی جبر باناخ B می‌توانیم ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف را به صورت زیر از A به B منتقل نمائیم.

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنیم A و B دو جبر باناخ، $\phi \in \Delta(B)$ و $h : A \longrightarrow B$ یک هم‌ریختی پیوسته با برد چگال است. اگر $\phi \circ h$، A-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد، آنگاه، B، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

برهان. فرض کنیم A، $\phi\circ h$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. از این رو $m \in A^{**}$ وجود دارد به قسمی که $m(\phi\circ h) = ۰$ و $m(\psi \cdot a) = \psi(a)$ برای هر $a \in \ker(\phi \circ h)$ و $\psi \in \Delta(A)$. تابعک $n \in B^{**}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$n(g) = m(g \circ h) \quad (g \in B^*).$$

بنابراین، $n(\phi) = m(\phi \circ h) = ۰$. از طرفی چون برد h در B چگال است، برای هر $b \in \ker(\phi)$ تور (e_n) در A وجود دارد به قسمی که $\lim_n h(e_n) = b$. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم $a_n = e_n - (\phi \circ h(e_n))a_۰$ که $\phi \circ h(a_۰) = ۱$. به وضوح برای هر n، $a_n \in \ker(\phi \circ h)$ و $\lim_n h(a_n) = b$. همچنین به ازای هر $\psi' \in \Delta(B)$، $(\psi' \circ h) \cdot a_n \longrightarrow (\psi' \cdot b) \circ h$ چون

$$\begin{aligned} ||(\psi' \circ h) \cdot a_n - (\psi' \cdot b) \circ h|| &= \sup_{||a|| \leq ۱} ||\psi'(h(a_n a)) - \psi'(bh(a))|| \\ &\leq \sup_{||a|| \leq ۱} ||h(a_n)h(a) - bh(a)|| \\ &\leq ||h(a_n) - b||||h||. \end{aligned}$$

از این رو برای هر $\psi' \in \Delta(B)$ داریم،

$$\begin{aligned} n(\psi' \cdot b) = m((\psi' \cdot b) \circ h) &= \lim_n m((\psi' \circ h) \cdot a_n) \\ &= \lim_n \psi'(a_n) \\ &= \lim_n \psi'(h(a_n)) \\ &= \psi'(b). \end{aligned}$$

بنابراین B، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. □

فرض کنیم A یک جبر باناخ و I یک ایده‌ال بسته از A است که دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار می‌باشد. می‌دانیم که هر سرشت از I به یک سرشت از جبر باناخ A توسیع می‌یابد. در واقع اگر $\phi \in \Delta(I)$، برای $u \in I$ که

$\phi(u) = ۱$ قرار دهیم:

$$\widetilde{\phi}(x) = \phi(xu) \quad (x \in A).$$

در این صورت $\widetilde{\phi} \in \Delta(A)$. برای دیدن برهانی از این گزاره، فرض کنیم (e_α) یک همانی تقریبی از I باشد و $u \in I$ در شرط $\phi(u) = ۱$ صدق کند. از این رو برای هر $a \in A$ و $b \in \ker(\phi)$ داریم،

$$\phi(ab) = \lim_\alpha \phi(ae_\alpha b) = ۰.$$

در نتیجه، $ab \in \ker(\phi)$ پس $\ker(\phi)$ یک ایده‌ال چپ از A است. چون برای هر $a, b \in A$، $bu - ubu \in \ker(\phi)$ در نتیجه $abu - aubu = a(bu - ubu) \in \ker(\phi)$. پس داریم،

$$\widetilde{\phi}(ab) = \phi(abu) = \phi(au)\phi(bu) = \widetilde{\phi}(a)\widetilde{\phi}(b) \quad (a, b \in A).$$

بنابراین اگر I دارای یک همانی تقریبی چپ باشد، $\Delta(I) \subseteq \Delta(A)$، یعنی هر سرشت از I به یک سرشت از A توسیع می‌یابد. در قضیه بعدی نشان می‌دهیم که تحت این شرایط، ایده‌ال I، ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف را از A به ارث می‌برد.

قضیه ۲.۳.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ و I یک ایده‌ال بسته از A است به قسمی که دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار است. فرض کنیم $\phi \in \Delta(A)$ و $I \nsubseteq \ker(\phi)$. اگر A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد، آنگاه، I، $\phi_{|I}$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

برهان. فرض کنیم (a_β) یک همانی تقریبی چپ کراندار برای I و (e_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای $\ker(\phi)$ است. به وضوح برای هر $\psi \in \Delta(I)$ داریم $\lim_\beta \psi(a_\beta) = ۱$.

به ازای هر α, β قرار می‌دهیم، $c_{\alpha,\beta} = e_\alpha a_\beta$. در نتیجه $(c_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)}$ یک تور در I است. حال برای هر $a \in \ker(\phi_{|I})$ و $\psi \in \Delta(I)$ داریم،

$$\begin{aligned}
\lim_{(\alpha,\beta)} \psi(ac_{(\alpha,\beta)}) &= \lim_{(\alpha,\beta)} \psi(ae_\alpha a_\beta) \\
&= (\lim_{(\alpha,\beta)} \psi(ae_\alpha))(\lim_{(\alpha,\beta)} \psi(a_\beta)) \\
&= (\lim_{(\alpha,\beta)} \widetilde{\psi}(ae_\alpha))(\lim_{(\alpha,\beta)} \psi(a_\beta)) \\
&= \widetilde{\psi}(a) = \psi(a).
\end{aligned}$$

بنابراین بنا به قضیه ۱.۲.۳ ایده‌ال I، $\phi_{|I}$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. □

نتیجه ۱.۳.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است که دارای یک همانی تقریبی چپ کراندار می‌باشد. اگر $\phi \in \Delta(A)$*

و $A^\sharp$، $\widetilde{\phi}$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد، آنگاه A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. اگر $A^\sharp$، ϕ_∞-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد، آنگاه A، $\circ$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.

قضیه ۳.۳.۳. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $\phi \in \Delta(A)$. اگر A^{**}، $\widehat{\phi}$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد، آنگاه A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

برهان. فرض کنیم A^{**}، $\widehat{\phi}$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. از این رو $m^{**} \in A^{****}$ وجود دارد به قسمی که،

$$m^{**}(\widehat{\phi}) = \circ, \quad m^{**}(\Psi \cdot F) = \Psi(F) \quad (\Psi \in \Delta(A^{**}), F \in \ker(\widehat{\phi})).$$

تابعک $m \in A^{**}$ را به صورت $m(f) = m^{**}(\widehat{f})$ برای هر $f \in A^*$ تعریف می‌کنیم. بنابراین، $m(\phi) = m^{**}(\widehat{\phi}) = \circ$ و برای هر $a \in \ker(\phi) \subseteq \ker(\widehat{\phi})$ و $\psi \in \Delta(A)$ داریم،

$$m(\psi \cdot a) = m^{**}(\widehat{\psi \cdot a}) = m^{**}(\widehat{\psi} \cdot \widehat{a}) = \widehat{\psi}(\widehat{a}) = \widehat{a}(\psi) = \psi(a).$$

در نتیجه A، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. □

۴.۳ ارتباط با گروه‌های میانگین‌پذیر

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. در این بخش ابتدا تعمیمی از قضیه کلاسیک لپتین-هرتس را ارائه می‌دهیم. سپس با استفاده از این تعمیم، به مطالعه ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف از جبر فیگا-تالامانکا-هرتس $A_p(G)$ برای هر $1 < p < \infty$، و جبر گروهی $L^1(G)$ می‌پردازیم. در پایان این خاصیت را برای جبرهای لبگ-فیگا-تالامانکا-هرتس و جبر توابع پیوسته وزن دار بررسی می‌نمائیم. قبل از بیان قضیه اصلی، ابتدا دو قضیه زیر را که ابزار اصلی ما در اثبات هستند، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۳. [64, Proposition 2.8] *فرض کنیم A یک جبر باناخ و $m \in A^{**}$ موجود است به قسمی که*

$$\inf\{| < \phi, m > | : \phi \in \Delta(A)\} > \circ.$$

در این صورت $\Delta(A)$ به طور ضعیف در A^* بسته است.

قضیه ۲.۴.۳. [5, Corollary 2.8] *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. در این صورت G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر G در $PM_p(G)$ که $1 < p < \infty$ به طور ضعیف بسته باشد.*

فارست و اسکانتراجا[۶] در [23] نشان دادند که اگر G یک گروه گسسته باشد، آنگاه $A(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد. اخیرا اولگر و کانیوث بدون هیچ فرض ابتدایی روی گروه

[۶] Skantharajah

G در [38, Theorem 5.1]، ثابت کردند که $A(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد. در قضیه بعد ما این نتیجه را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۳. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است و $1 < p < \infty$. در این صورت G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $A_p(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف باشد.*

برهان. فرض کنیم (e_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای $A_p(G)$ است و $E \in A_p(G)^{**}$ یک نقطه حدی ضعیف ستاره از $(\widehat{e_\alpha})$ باشد. بنابراین، برای هر $\phi \in \Delta(A_p(G)) = G$ داریم،

$$< E, \phi >= \lim_\alpha \phi(e_\alpha) = 1.$$

چون (e_α) یک همانی تقریبی Δ-ضعیف است و بنا به قضیه ۶.۲.۱ برای هر $x \in G$، $u \in A_p(G)$ یافت می‌شود که $u(x) = 1$. در نتیجه طبق قضیه ۱.۴.۳، $G = \Delta(A_p(G))$ در $A_p(G)^* = PM_p(G)$ به طور ضعیف بسته است. حال نتیجه از قضیه ۲.۴.۳ حاصل می‌شود. □

قضیه ۴.۴.۳. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است.*

الف) *اگر G میانگین‌پذیر باشد، آنگاه برای هر $\phi \in \Delta(L^1(G)) \cup \{0\}$، $L^1(G)$، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

ب) *فرض کنیم $1 < p < \infty$ و $\phi \in \Delta(A_p(G)) \cup \{0\}$. در این صورت G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $A_p(G)$، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف باشد.*

برهان. الف) چون G میانگین‌پذیر است، $L^1(G)$ برای هر $\phi \in \Delta(L^1(G)) \cup \{0\}$ طبق قضیه ۵.۴.۱، ϕ-میانگین‌پذیر است. از طرفی چون جبر گروهی $L^1(G)$ همیشه دارای یک همانی تقریبی کراندار است، حکم از قضیه ۴.۴.۱ بدست می‌آید.

ب) ابتدا فرض کنیم G میانگین‌پذیر است. بنابراین طبق قضیه لپتین-هرتس، $A_p(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است. همچنین طبق قضیه ۵.۴.۱، $A_p(G)$ برای هر $\phi \in \Delta(A_p(G)) \cup \{0\}$، ϕ-میانگین‌پذیر است. حال حکم از قضیه ۴.۴.۱ بدست می‌آید.

برعکس، اگر $\phi = 0$، جبر $A_p(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است. بنابراین بنا به قضیه ۳.۴.۳، G میانگین‌پذیر است. در حالتی که $\phi \in \Delta(A_p(G))$، قضیه ۴.۲.۳ نتیجه می‌دهد که $A_p(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است و مجددا قضیه ۳.۴.۳ نتیجه می‌دهد که G میانگین‌پذیر است. □

نکته ۱۱. *می‌دانیم اگر G یک گروه موضعا فشرده باشد، آنگاه $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر*

$$\ker(\phi_1) = \{f \in L^1(G) : \int_G f(x)dx = 0\},$$

دارای یک همانی تقریبی کراندار باشد [60, Theorem 2.3.9]*، که در رابطه فوق* ϕ_1 *یک سرشت از جبر باناخ* $L^1(G)$ *است که به صورت* $\phi_1(f) = \int_G f(x)dx$ *تعریف می‌شود. اگر بتوانیم عکس قسمت (الف) قضیه ۴.۴.۳ را ثابت کنیم، تعمیم قابل توجهی از گزاره ذکر شده را نتیجه می‌گیریم.*

قضیه ۵.۴.۳. *فرض کنیم* G *یک گروه موضعا فشرده است،* $1 \leq r < \infty$ *و* $1 < p < \infty$ *.*

۱. *به ازای هر* $\phi \in \Delta(A_p^r(G)) \cup \{0\}$ *جبر* $A_p^r(G)$ *،* ϕ*-میانگین پذیر* Δ*-ضعیف است.*

۲. $A_p^r(G)$ *دارای یک همانی تقریبی کراندار* Δ*-ضعیف است.*

۳. G *میانگین پذیر است.*

۴. G *فشرده است.*

در این صورت داریم: (۳) $\Longrightarrow$ (۲) $\Longrightarrow$ (۱) *و* (۱) $\Longrightarrow$ (۴) *.*

برهان. (۲) $\Longrightarrow$ (۱): با توجه به نتیجه ۳.۲.۳، حکم حاصل می‌گردد.

(۳) $\Longrightarrow$ (۲): فرض کنیم (u_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای $A_p^r(G)$ است. در این صورت با توجه به تعریف $A_p^r(G)$ و نرم این فضا، نتیجه می‌گیریم که (u_α) یک تور کراندار در $A_p(G)$است. حال حکم با توجه به قضیه ۳.۴.۳، چگال بودن $C_c(G) \cap A_p(G)$ در $A_p(G)$ و این واقعیت که به ازای هر $u \in C_c(G) \cap A_p(G) \subseteq A_p^r(G)$ داریم،

$$\lim_\alpha |\phi_x(u_\alpha u) - \phi_x(u)| = 0 \quad (x \in G),$$

نتیجه می‌شود.

(۱) $\Longrightarrow$ (۴): اگر G فشرده باشد، بنا به قضیه ۱۰.۲.۱ داریم، $A_p^r(G) = A_p(G)$. چون هر گروه فشرده میانگین‌پذیر است، حکم مشابه اثبات قسمت (ب) از قضیه ۴.۴.۳ حاصل می‌شود. □

در سال ۱۹۹۰ فارست در [20, Theorem 3.9] نشان داد که G یک گروه میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر برای یک زیر گروه بسته و میانگین‌پذیر H از G، ایده‌ال $I_2(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار باشد. حال تعمیمی از این قضیه را به صورت زیر ارائه می‌دهیم.

قضیه ۶.۴.۳. *فرض کنیم* G *یک گروه موضعا فشرده است و* $1 < p < \infty$ *. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.*

۱. G *میانگین‌پذیر است.*

۲. *به ازای هر* $\phi \in \Delta(A_p(G))$ *،* $A_p(G)$ *،* ϕ*-میانگین‌پذیر* Δ*-ضعیف است.*

۳. *به ازای یک زیرگروه بسته و میانگین‌پذیر H از G، ایده‌ال $I_p(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است.*

برهان. تنها (۳) $\Longrightarrow$ (۲) و (۱) $\Longrightarrow$ (۳) را نشان می‌دهیم. معادل بودن ۱ و ۲ حالتی خاص از قسمت (ب) قضیه ۴.۴.۳ است. اما اثبات (۳) $\Longrightarrow$ (۲) نیز ساده است، تنها فرض کنید $H = \{e\}$ که e همانی گروه G است. به وضوح H یک زیرگروه بسته و میانگین‌پذیر از G است.

(۱) $\Longrightarrow$ (۳): فرض کنید برای زیرگروه بسته و میانگین‌پذیر H از گروه G، $I_p(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است. چون H میانگین‌پذیر است، بنا به قضیه لپتین-هرتس، $A_p(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است. از طرفی طبق قضیه ۴.۲.۱ می دانیم که $A_p(G)/I_p(H)$ به طور طول‌پای با $A_p(H)$ یک‌ریخت است. بنابراین، $A_p(G)/I_p(H)$ نیز دارای یک همانی تقریبی کراندار است. حال حکم با توجه به قضیه‌های ۴.۲.۳ و ۳.۴.۳ بدست می‌آید. □

در سال ۲۰۰۳ قضیه فارست در [21, Corollary 1.6] به صورت زیر بهبود یافت:

فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است. در این صورت G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر زیرگروه بسته سره H از G موجود باشد به قسمی که $I(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است.

در واقع، در این قضیه شرط میانگین‌پذیری از روی گروه H حذف شده است. در ادامه تلاش خواهیم کرد تا قضیه فوق را برای همانی‌های تقریبی کراندار Δ-ضعیف بیان و ثابت کنیم که حالت بسیار قوی‌تری از قضیه ۶.۴.۳ است.

قضیه ۷.۴.۳. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است و $1 < p < \infty$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.*

۱. *G میانگین‌پذیر است.*

۲. *به ازای یک زیرگروه بسته و سره H از گروه G، $I_p(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است.*

برهان. با توجه به [21, Corollary 4.2]، تنها (۱) $\Longrightarrow$ (۲) را نشان می‌دهیم. فرض کنیم برای زیرگروه بسته و سره H از G، $I_p(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است.

چون H سره است، $x \in G \setminus H$ وجود دارد. از طرفی، نگاشت $I_p(H) \longrightarrow I_p(xH)$ که به صورت $u \longrightarrow L_x u$ تعریف می‌گردد، با توجه به لم ۷.۲.۱، یک یک‌ریختی طول‌پای است. از این رو با توجه به تعریف عملگر L_x، $I_p(xH)$ نیز دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است که آن را با (u_α) نشان می‌دهیم.

فرض کنیم $\nu \in A(H) \cap C_c(H)$ و $K = \operatorname{supp} \nu$. همسایگی باز V از K در G موجود است به قسمی که $V \cap xH = \emptyset$، چون $K \cap xH = \emptyset$ و G یک فضای توپولوژیک نرمال است [31, Theorem 8.13]. در نتیجه با

توجه به قضیه ۶.۲.۱، $u \in A_p(G)$ وجود دارد به قسمی که $\operatorname{supp} u \subseteq V$ و به ازای هر $t \in K$، $u(t) = ۱$. همچنین، با توجه به قضیه ۵.۲.۱، $v \in A_p(G)$ موجود است به قسمی که $v_{|H} = \nu$. حال قرار می‌دهیم $w = vu$. به وضوح $w \in I(xH)$ و $w_{|H} = \nu$.

به ازای هر α، قرار می‌دهیم $v_\alpha = u_{\alpha|H}$. مجددا با توجه به قضیه ۵.۲.۱ نتیجه می‌گیریم که (v_α) یک تور کراندار در $A_p(H)$ است.

حال به ازای هر $\nu \in C_c(H) \cap A_p(H)$ و $x \in H$ داریم،

$$\begin{aligned}\lim_\alpha |\phi_x(v_\alpha \nu) - \phi_x(\nu)| &= \lim_\alpha |v_\alpha(x)\nu(x) - \nu(x)| \\ &= \lim_\alpha |u_\alpha(x)w(x) - w(x)| = ۰.\end{aligned}$$

بنابراین، (v_α) یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای $A_p(H)$ است، چون طبق قضیه ۶.۲.۱، $C_c(H) \cap A_p(H)$ در $A_p(H)$ چگال است. بنابراین، طبق قضیه ۳.۴.۳ و قضیه ۶.۴.۳ حکم حاصل می‌شود. □

فارست، کنیوث، لائو و اسپرونک در [21, Corollary 4.2] نشان دادند، اگر G یک گروه موضعا فشرده میانگین‌پذیر و H یک زیرگروه بسته از G باشد، آنگاه $I_p(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است. حال با استفاده از قضیه ۷.۴.۳، نتیجه می‌گیریم که عکس نتیجه فوق نیز برقرار است.

نتیجه ۱.۴.۳. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و $۱ < p < \infty$. اگر به ازای یک زیرگروه بسته و سره H از G، ایده‌ال $I_p(H)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار باشد، در این صورت G میانگین‌پذیر است.*

تعریف ۱.۴.۳. *[2] فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده و $w : G \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع نیم‌پیوسته بالایی است به قسمی که برای هر $x \in G$، $w(x) \geq ۱$. قرار می‌دهیم:*

$$C_\circ^w(G) = \{f \in C(G) : fw \in C_\circ(G)\}.$$

به وضوح $C_\circ^w(G)$ با اعمال نقطه‌وار و نرم،

$$||f||_w = \sup_{x \in G} |f(x)|w(x),$$

یک جبر باناخ است به قسمی که $\Delta(C_\circ^w(G)) = G$. با توجه به [2, Corollary 3.6] نتیجه می‌گیریم که $C_\circ^w(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است اگر و تنها اگر w کراندار باشد. همچنین می‌دانیم که $C_\circ^w(G)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است اگر و تنها اگر w کراندار باشد [36, Corollary 4.7].

قضیه ۸.۴.۳. *فرض کنیم G یک گروه موضعا فشرده است و $t \in G$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.*

۱. *$C_\circ^w(G)$، ϕ_t-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

۲. *w کراندار است.*

برهان. اثبات (۲) $\Longrightarrow$ (۱) از قضیه ۴.۲.۳ و [36, Corollary 4.7] حاصل می‌گردد.

(۱) $\Longrightarrow$ (۲): فرض کنیم w کراندار است و عدد مثبت M موجود است به قسمی که برای هر $x \in G$، $w(x) < M$. نشان می‌دهیم تور کراندار $(f_\alpha) \subseteq C_\circ^w(G)$ وجود دارد به قسمی که،

$$\phi_t(f_\alpha) = f_\alpha(t) = ۱, \quad ||gf_\alpha - \phi_t(g)f_\alpha||_w \longrightarrow \circ \quad (g \in C_\circ^w(G)).$$

برای این منظور، فرض کنیم $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ یک پایه همسایگی در t است که به وسیله شمول معکوس، جهت‌دار شده است. برای هر $\alpha \in \Gamma$ با توجه به لم اوریسون[۷]، تابع پیوسته $f_\alpha : G \longrightarrow [\circ, ۱]$ وجود دارد به قسمی که $f_\alpha(t) = ۱$ و $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subseteq V_\alpha$.

فرض کنیم $\epsilon > \circ$ و $g \in C_\circ^w(G)$. برای $\epsilon' = \epsilon/۲M$، همسایگی V از t موجود است به قسمی که،

$$|g(y) - g(t)| < \epsilon' \quad (y \in V).$$

از سوی دیگر، فرض کنیم $\alpha_\circ \in \Gamma$ عضوی باشد به قسمی که $V_{\alpha_\circ} \subseteq V$. در نتیجه $x_\circ \in G$ وجود دارد به طوری که،

$$\begin{aligned} ||gf_\alpha - \phi_t(g)f_\alpha||_w &= \sup_{x\in G} |g(x)f_{\alpha_\circ}(x) - g(t)f_{\alpha_\circ}(x)|w(x) \\ &< |g(x_\circ)f_{\alpha_\circ}(x_\circ) - g(t)f_{\alpha_\circ}(x_\circ)|w(x_\circ) + \epsilon/۲ \\ &< M\epsilon' + \epsilon/۲ = \epsilon. \end{aligned}$$

حال حکم از قضیه ۴.۴.۱ بدست می‌آید. □

۵.۳ مثال‌ها

در این بخش ما تنها به ارائه مثال‌هایی می‌پردازیم که مطالب بخش قبلی را تا حد زیادی تصریح می‌کند. برخی از این مثال‌ها بیانگر این هستند که عکس برخی از قضایا در حالت کلی درست نیستند و برخی از آنها تمایز بین دو مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری و ϕ-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف و سایر مفاهیم ارائه شده را مشخص می‌کنند.

مثال زیر نشان می دهد که دو مفهوم $\circ$-میانگین‌پذیری و $\circ$-میانگین‌پذیری Δ-ضعیف با یک‌دیگر متفاوت هستند.

مثال ۱. *فرض کنیم $S = (\mathbb{Q}^+, +)$. در این صورت $A = l^۱(S)$، $\circ$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اما $\circ$-میانگین‌پذیر نیست، چون A دارای یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف است اما دارای هیچ همانی تقریبی (کراندار و یا بی‌کران) نیست* [35].

سه مثال بعدی جبرهای باناخی را ارائه می‌دهند که ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف هستند اما ϕ-میانگین‌پذیر نیستند.

[۷] Urysohn

مثال ۲. *فرض کنیم X یک فضای باناخ و $F \in X^*$ یک تابعک ناصفر است که $||F|| \leq ۱$. طبق قضیه ۵.۲.۲، می‌دانیم که $\Delta(A_F(X)) = \{F\}$. از طرفی در [51, Example 2.4] ثابت شده است که $A_F(X)$، F-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $\dim(X) = ۱$.*

بنابراین، اگر X را یک فضای باناخ در نظر بگیریم که $\dim(X) > ۱$، آنگاه جبر باناخ $A_F(X)$، F-میانگین‌پذیر نیست اما طبق قضیه ۳.۲.۳، F-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.

فرض کنیم A, B دو جبر باناخ و $\theta \in \Delta(B)$. جبر θ-ضرب لائو، $A \times_\theta B$ برابر حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ است که عمل ضرب آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a_۱, b_۱)(a_۲, b_۲) = (a_۱a_۲ + \theta(b_۲)a_۱ + \theta(b_۲)a_۱, b_۱b_۲) \quad (a_۱, a_۲ \in A, b_۱, b_۲ \in B)\cdot$$

با نرم $l^۱$ و ضرب فوق، $A \times_\theta B$ یک جبر باناخ است (برای مطالعه بیشتر در مورد این جبر باناخ به [46] مراجعه کنید).

مثال ۳. *فرض کنیم $A = B = A_F(X)$ که $\dim(X) > ۱$. با توجه به [46, Proposition 2.8] اگر قرار می‌دهیم، $C = A \times_F B$، آنگاه نتیجه می‌شود که $|\Delta(C)| = ۲$. بنابراین طبق قضیه ۳.۲.۳ جبر باناخ C برای هر $\phi \in \Delta(C)$، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. اما طبق [47, Lemma 6.8(iii)]، سرشت $\phi \in \Delta(C)$ وجود دارد که C، ϕ-میانگین‌پذیر نیست.*

مثال ۴. *فرض کنیم $n \geq ۲$ یک عدد صحیح و A جبر باناخ تمام ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ است. می‌دانیم $\Delta(A) = \{\phi_۱, \ldots, \phi_n\}$ که*

$$\phi_k([a_{ij}]) = a_{kk} \quad (k = ۱, ۲, ۳, ..., n).$$

جبر باناخ A، برای هر $\phi \in \Delta(A)$، ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است، چون برای هر $\phi_k \in \Delta(A)$، ماتریس $e_k = [a_{ij}]$ به قسمی که

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j, i \neq k \\ ۰ & i = j = k \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

عضوی است از $\ker(\phi_k)$ و برای هر $i \neq k$، $\phi_i(e_k) = ۱$.

اما برای هر $i \geq ۲$، جبر باناخ A، ϕ_i-میانگین‌پذیر نمی‌باشد، چون $\ker(\phi_i)$ دارای یک همانی راست نیست. بنابراین حکم از قضیه ۴.۴.۱ بدست می‌آید، چون هر جبر باناخ متناهی بعد که دارای یک همانی راست تقریبی کراندار باشد، یک همانی راست دارد.

مثال بعد جبر باناخی را ارائه می‌دهد که یک همانی Δ-ضعیف دارد اما دارای همانی نیست. همچنین این جبر باناخ نشان می‌دهد که عضو همانی Δ-ضعیف لزوما یکتا نمی‌باشد.

مثال ۵. *فرض کنیم $A = A_F(X)$ و $x_\circ \in X$ عضوی است که $F(x_\circ) = ۱$. در نتیجه $x_\circ$ یک همانی Δ-ضعیف برای جبر باناخ A است که لزوما یکتا نیست، چون هر عضو $x \in X$ که در شرط $F(x) = ۱$ صدق کند یک همانی Δ-ضعیف برای A است. از طرفی اگر $\dim(X) \geq ۲$ طبق قضیه ۲.۱.۲ جبر باناخ A دارای هیچ عضو همانی نیست.*

برخی از جبرهای باناخ هم ϕ-میانگین‌پذیر و هم ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف هستند.

مثال ۶. *فرض کنیم A یک C^*-جبر است که $\Delta(A) \neq \emptyset$. طبق [48, Theorem 3.1.2] می‌دانیم که هر ایده‌ال بسته از A دارای یک همانی تقریبی کراندار است. بنابراین A هم ϕ-میانگین‌پذیر و هم ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است.*

در مثال بعد خواهیم دید که جبرهای باناخی وجود دارند که نه ϕ-میانگین‌پذیرند و نه ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف. همچنین جبرهای باناخی وجود دارند که $\circ$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف هستند ولی ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف نیست.

مثال ۷. *فرض کنیم $A = C^۱[\circ, ۱]$ جبر باناخ تمام توابع پیوسته روی بازه $[\circ, ۱]$ باشد که مشتق پیوسته دارند و با نرم $||f||_۱ = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ تجهیز شده‌اند. می‌دانیم که*

$$\Delta(A) = \{\phi_t : t \in [\circ, ۱]\}.$$

بنا به [39, Example 2.5(i)] جبر باناخ A برای هر $t \in [\circ, ۱]$، ϕ_t-میانگین‌پذیر نیست. حال نشان می‌دهیم که این جبر باناخ برای هر $t \in [\circ, ۱]$، ϕ_t-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف هم نیست.

فرض کنیم برای $t_\circ \in [\circ, ۱]$ جبر باناخ A، $\phi_{t_\circ}$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است. از این رو $\ker(\phi_{t_\circ})$ یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف (f_α) دارد. بنابراین ثابت $M > \circ$ وجود دارد به قسمی که به ازای هر α،

$$||f'_\alpha||_\infty = \sup_{t \in [\circ, ۱]} |f'_\alpha(t)| < M$$

و

$$\lim_\alpha f_\alpha(t_\circ) = \circ, \quad \lim_\alpha f_\alpha(t) = ۱ \quad (t \in [\circ, ۱] \setminus \{t_\circ\}).$$

برای اندیس $\alpha_\circ$ داریم،

$$\lim_{t \longrightarrow t_\circ} |\frac{f_{\alpha_\circ}(t) - f_{\alpha_\circ}(t_\circ)}{t - t_\circ}| = |f'_{\alpha_\circ}(t_\circ)| < M.$$

بنابراین $\varepsilon > \circ$ وجود دارد به قسمی که برای هر $t \in N(t_\circ, \epsilon) = \{t : \circ < |t - t_\circ| < \varepsilon\}$،

$$|f_{\alpha_\circ}(t) - f_{\alpha_\circ}(t_\circ)| < M|t - t_\circ|.$$

اما رابطه فوق در حالت کلی صحیح نیست، چون با نزدیک شدن t به $t_\circ$ سمت راست به صفر نزدیک می‌شود ولی سمت چپ به یک. پس جبر باناخ A، $\phi_{t_\circ}$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف نیست.

به وضوح بررسی می‌شود که دنباله $\{\frac{n-t^n}{n}\}$ یک همانی تقریبی کراندار Δ-ضعیف برای جبر باناخ A است. بنابراین این جبر باناخ $\circ$-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است ولی همان طور که در بالا مشاهده کردیم برای هر $t \in [\circ, ۱]$، ϕ_t-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه ۱.۳.۳ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۸. *فرض کنیم $A = C^۱[\circ, ۱]$، $B = C[\circ, ۱]$ و $h : A \longrightarrow B$ نگاشت شمول است. می‌دانیم که A در B چگال است چون شامل تمام توابع چندجمله‌ای است. اما بنا به مثال‌های فوق B برای هر $t \in [\circ, ۱]$، ϕ_t-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اما A این گونه نیست.*

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه ۶.۲.۳ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۹. *فرض کنیم $A = A_F(X)$ همان جبر باناخ در مثال ۲ است که نشان دادیم F-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف است اما $\ker(\widehat{F}) \in$ **mod-A** انژکتیو نیست. فرض کنیم که $\ker(\widehat{F}) \in$ **mod-A** انژکتیو است. در این صورت طبق قضیه ۷.۴.۱ برای $\circ \neq a_\circ \in \ker(F)$ داریم، $\ker(\widehat{F})^\perp = \ker(\widehat{F}) \cdot a_\circ$. حال نشان می‌دهیم که $\ker(\widehat{F}) \cdot a_\circ = \{\circ\}$ اما $\ker(\widehat{F})^\perp \neq \{\circ\}$.*

فرض کنیم $a \in A$، $a^* \in A^*$ و $a^{**} \in \ker(\widehat{F})$. بنابراین داریم،

$$< a_\circ \cdot a^*, a >=< a^*, a \cdot a_\circ >= F(a) < a^*, a_\circ > \cdot$$

از این رو $a_\circ \cdot a^* =< a^*, a_\circ > F$. از سوی دیگر

$$< a^{**} \cdot a_\circ, a^* >=< a^{**}, a_\circ \cdot a^* >=< a^*, a_\circ >< a^{**}, F >= \circ \cdot$$

در نتیجه $a^{**} \cdot a_\circ = \circ$. همچنین داریم،

$$< \widehat{a_\circ} \cdot a, a^* >=< \widehat{a_\circ}, a \cdot a^* >=< a \cdot a^*, a_\circ >=< a^*, a_\circ \cdot a >=< a^*, F(a_\circ)a >= \circ.$$

بنابراین $\circ \neq \widehat{a_\circ} \in \ker(\widehat{F})^\perp$.

فصل ۴

ویژگی‌های موروثی مدول‌های سرشت انژکتیو

۱.۴ مقدمه

مفهوم مدول‌های باناخ انژکتیو، تخت و تصویری برای اولین بار توسط هلمسکی در سال ۱۹۷۲ ارائه شد. ایشان در سال ۱۹۸۶ این مطالب را در قالب یک کتاب (مرجع [28]) گردآوری و به مطالعه و بررسی ارتباط بین مفاهیم مانستگی و همانستگی پرداختند. یکی از این ارتباطات بسیار جالب، گزاره زیر است:

فرض کنیم A یک جبر باناخ میانگین‌پذیر است. در این صورت هر باناخ A-مدول E، تخت است، یعنی، E^* انژکتیو است.

اما ایشان نتوانستند عکس گزاره فوق را ثابت نمایند و این سئوال تا به امروز هنوز به طور قطعی پاسخ داده نشده است، اما کارهای جالبی در راستای حل آن انجام شده است. در واقع برای تعداد زیادی از جبرها و مدول‌های باناخ ثابت شده که عکس گزاره فوق درست است. یکی از جالب‌ترین این کارها توسط راچر صورت گرفت. در واقع ایشان نشان دادند که برای گروه موضعا فشرده G، اگر $L^1(G)$ دارای یک مدول انژکتیو و انعکاسی باشد، آنگاه G و از این رو $L^1(G)$ میانگین‌پذیر است [53].

در سال ۲۰۰۴، دلز و پولییاکو توانستند انژکتیو، تخت و تصویری بودن تعدادی از مدول‌های باناخ روی جبرهای گروهی را توصیف نمایند [10]. در حین انجام این کار پژوهشی سئوالی مطرح گردید که برای گروه موضعا فشرده G، چه هنگام $L^1(G)$-باناخ مدول $L^p(G)$ برای $1 < p < \infty$، انژکتیو است؟ حل این سئوال منجر به ارائه یک مفهوم بسیار جالب دیگر به‌نام فضاهای چندنرمی[1] شد، که این مفهوم جدید نیز به محض ورود به دنیای مفاهیم مختلف در ریاضی محض مورد توجه بسیاری قرار گرفت و در حال حاضر نیز تحقیقات وسیعی روی این مبحث و کاربردهای آن انجام شده است [11].

اخیرا نصر-اصفهانی و سلطانی رنانی در [50]، برای جبر باناخ A، مفهومی از انژکتیو، تخت و تصویری بودن A-مدول‌های باناخ را بر مبنای سرشت‌های جبر باناخ A ارائه نمودند و توانستند سئوال حل نشده هلمسکی، در حالتی که

[1] Multi−normed spaces

مفهوم میانگین‌پذیری را با مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری برای سرشت ϕ از جبر A، تعویض می‌نمایند، حل کنند.

در ادامه این بخش، ابتدا برخی از تعاریف، نمادها و مقدمات لازم را از [50] یادآوری می‌کنیم. سپس در بخش دوم به ذکر چند قضیه و نتیجه در رابطه با این مفهوم مانستگی جدید پرداخته و در پایان در بخش سوم کاربرد قضایای بخش دوم را روی جبرهای نیم‌گروهی بدست می‌آوریم.

فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $\phi \in \Delta(A)$. برای هر $E \in \mathbf{A\text{-}mod}$ قرار می‌دهیم:

$$I(\phi, E) = \text{span}\{a \cdot x - \phi(a)x : a \in A, x \in E\}.$$

تعریف ۱.۱.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ است، $\phi \in \Delta(A)$ و $E \in \mathbf{A\text{-}mod}$. می‌گوئیم E یک A-مدول ϕ-انژکتیو چپ است اگر برای هر $F, K \in \mathbf{A\text{-}mod}$ و تک‌ریختی قابل‌قبول $T : F \longrightarrow K$ با شرط $I(\phi, K) \subseteq Im(T)$ نگاشت القایی $T_E : {}_AB(K, E) \longrightarrow {}_AB(F, E)$ با ضابطه $T_E(R) = R \circ T$ پوشا باشد. به طور مشابه مفهوم A-مدول ϕ-انژکتیو راست نیز تعریف می‌شود.*

همچنین E را یک A-مدول ϕ-تخت چپ (راست) می‌نامیم اگر E^* یک A-مدول ϕ-انژکتیو راست (چپ) باشد.

برای هر $E \in \mathbf{A\text{-}mod}$ قرار می‌دهیم:

$${}_\phi B(A^\sharp, E) = \{T \in B(A^\sharp, E) : T(ab - \phi(b)a) = a \cdot T(b - \phi(b)e^\sharp) \quad \forall a, b \in A\},$$

و در حالتی که $E \in \mathbf{mod\text{-}A}$،

$$B_\phi(A^\sharp, E) = \{T \in B(A^\sharp, E) : T(ab - \phi(b)a) = T(a - \phi(a)e^\sharp) \cdot b \quad \forall a, b \in A\}.$$

به وضوح ${}_\phi B(A^\sharp, E)$ یک A-زیر مدول بسته از $B(A^\sharp, E)$ است (چون برای هر $b \in \ker(\phi)$، اگر $T \in {}_\phi B(A^\sharp, E)$، در این صورت به ازای هر $a \in A$ داریم، $T(ab) = a \cdot T(b)$). همچنین نگاشت ${}_\phi\Pi^\sharp : E \longrightarrow_\phi B(A^\sharp, E)$ با ضابطه

$${}_\phi\Pi^\sharp(x)(a) = a \cdot x \qquad (x \in E, a \in A^\sharp),$$

یک هم‌ریختی A-مدولی چپ است.

قضیه ۱.۱.۴. [50, Theorem 2.4] *فرض کنیم A یک جبر باناخ است، $\phi \in \Delta(A)$ و $E \in \mathbf{A\text{-}mod}$. در این صورت E یک A-مدول ϕ-انژکتیو چپ است اگر و تنها اگر ${}_\phi\rho^\sharp \in {}_AB({}_\phi B(A^\sharp, E), E)$ موجود باشد به قسمی که ${}_\phi\rho^\sharp \circ {}_\phi\Pi^\sharp = I_E$، یعنی ${}_\phi\rho^\sharp$ یک وارون چپ برای ${}_\phi\Pi^\sharp$ است (و یا به‌طور معادل ${}_\phi\Pi^\sharp$ یک دوگان درون‌بری است).*

قضیه ۲.۱.۴. [50, Proposition 3.1] *فرض کنیم A یک جبر باناخ است و $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت A، ϕ-میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر هر $E \in \mathbf{A\text{-}mod}$، ϕ-تخت چپ باشد.*

در ادامه مثالی از یک جبر باناخ ارائه می‌دهیم که انژکتیو نیست، اما سرشت انژکتیو است.

مثال ۱۰. *فرض کنیم X یک فضای باناخ و $\varphi \in X^*$ یک تابعک ناصفر است که $||\varphi|| \leq ۱$. همچنین فرض کنیم $A = A_\varphi(X)$ و $\dim(X) \geq ۲$. از این رو طبق قضیه ۲.۱.۲، A دارای یک همانی راست نیست. پس طبق قسمت (الف) از قضیه ۶.۴.۱، $A \in$ **A-mod** انژکتیو نیست.*

*اما $A \in$ **A-mod**، φ-انژکتیو چپ است، چون نگاشت*

$$\rho : {}_\varphi B(A^\sharp, A) \longrightarrow A,$$
$$T \longrightarrow T(e^\sharp) \quad (T \in {}_\varphi B(A^\sharp, A)),$$

یک هم‌ریختی A-مدولی چپ و یک وارون چپ برای ${}_\varphi\Pi^\sharp$ است.

۲.۴ مدول‌های ϕ-انژکتیو و برخی از خواص موروثی آنها

قضیه زیر یک شرط کافی برای ϕ-انژکتیو بودن برخی از A-مدول‌های چپ، هنگامی که A جابه‌جایی است را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی است، $\phi \in \Delta(A)$ و $E \in$ **A-mod**. اگر $E^\perp \cap (\ker(\phi))^c \neq \emptyset$، آنگاه E، ϕ-انژکتیو چپ است.*

برهان. فرض کنیم $a_\circ \in E^\perp \cap (\ker(\phi))^c$ و $\phi(a_\circ) = ۱$. نگاشت ${}_\phi\rho^\sharp : {}_\phi B(A^\sharp, E) \longrightarrow E$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_\phi\rho^\sharp(T) = T(e^\sharp - a_\circ) \quad (T \in {}_\phi B(A^\sharp, E)).$$

از این رو برای هر $x \in E$ داریم،

$${}_\phi\rho^\sharp \circ {}_\phi\Pi^\sharp(x) = {}_\phi\Pi^\sharp(x)(e^\sharp - a_\circ) = (e^\sharp - a_\circ) \cdot x = x.$$

بنابراین، ${}_\phi\rho^\sharp \circ {}_\phi\Pi^\sharp = I_E$. از سوی دیگر برای هر $a \in A$ و $T \in {}_\phi B(A^\sharp, E)$ داریم،

$$\begin{aligned} {}_\phi\rho^\sharp(a \cdot T) = (a \cdot T)(e^\sharp - a_\circ) &= T((e^\sharp - a_\circ) \cdot a) \\ &= T(a - a_\circ a) \\ &= T(a\phi(a_\circ) - aa_\circ). \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

چون $T \in {}_\phi B(A^\sharp, E)$، پس $T(a\phi(a_\circ) - aa_\circ) = a \cdot T(e^\sharp - a_\circ)$. با استفاده از رابطه ۱.۴ نتیجه می‌گیریم،

$${}_\phi\rho^\sharp(a \cdot T) = a \cdot T(e^\sharp - a_\circ) = a \cdot {}_\phi\rho^\sharp(T).$$

در نتیجه نگاشت ${}_\phi\rho^\sharp$ یک هم‌ریختی A-مدولی چپ است و این نتیجه می‌دهد که E، ϕ-انژکتیو چپ است. □

نتیجه ۱.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی و J یک ایده‌ال بسته از A باشد به قسمی که $\phi_{|J} \neq 0$. در این صورت $\frac{A}{J}$ یک A-مدول چپ ϕ-انژکتیو است.*

برهان. چون $\phi_{|J} \neq 0$، $a_0 \in J$ وجود دارد به قسمی که $\phi(a_0) \neq 0$. از طرفی چون J یک ایده‌ال از A است، $a_0 \in (\frac{A}{J})^{\perp}$. حال حکم از قضیه ۱.۲.۴ بدست می‌آید. □

نتیجه ۲.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی است، $\phi \in \Delta(A)$ و $E \in$ **A-mod** در شرط $I(\phi, E) = \{0\}$ صدق می‌کند. در این صورت به ازای هر $\psi \in \Delta(A) \setminus \{\phi\}$، E یک A-مدول ψ-انژکتیو است.*

برهان. چون $\phi \neq \psi$، بنا به لم ۲.۲.۳، $a_0 \in A$ وجود دارد به قسمی که $\phi(a_0) = 0$ و $\psi(a_0) = 1$. از سوی دیگر چون $I(\phi, E) = \{0\}$، نتیجه می‌گیریم که $a_0 \in E^{\perp} \cap (\ker(\psi))^c$. حال حکم از قضیه ۱.۲.۴ بدست می‌آید. □

در ادامه چند ویژگی موروثی از مدول‌های ϕ-انژکتیو چپ را ارائه می‌دهیم که در بخش بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیه ۲.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ، $\phi \in \Delta(A)$ و J یک ایده‌ال بسته از A است به قسمی که $\phi_{|J} \neq 0$.*

الف: *فرض کنیم J دارای عضو همانی باشد و $E \in$ **J-unmod**. اگر E یک A-مدول چپ ϕ-انژکتیو باشد، آنگاه E یک J-مدول چپ $\phi_{|J}$-انژکتیو نیز است.*

ب: *اگر E یک J-مدول چپ $\phi_{|J}$-انژکتیو و صادق باشد، آنگاه E یک A-مدول چپ ϕ-انژکتیو نیز است.*

برهان. الف: فرض کنیم $E \in$ **A-mod** یک مدول ϕ-انژکتیو چپ است و e_J همانی J باشد. به وضوح بررسی می‌شود که F و K یک A-مدول چپ باناخ با اعمال مدولی زیر هستند:

$$a \bullet f = (ae_J) \cdot f \quad (a \in A, f \in F),$$

$$a \bullet k = (ae_J) \cdot k \quad (a \in A, k \in K).$$

این A-مدول‌های باناخ را با نمادهای $\widetilde{F}, \widetilde{K}$ نشان می‌دهیم.

حال فرض کنیم $F, K \in$ **J-mod** و $T : F \longrightarrow K$ یک تک‌ریختی قابل‌قبول است که $I(\phi_{|J}, K) \subseteq \mathrm{Im}T$. نشان می‌دهیم که نگاشت القایی $T_J : {}_JB(K, E) \longrightarrow {}_JB(F, E)$ پوشاست. اگر $W \in {}_JB(F, E)$ و نگاشت $\widetilde{W} : \widetilde{F} \longrightarrow E$ را به صورت $\widetilde{W}(f) = W(f)$ تعریف کنیم، در این صورت، برای هر $a \in A$ و $f \in F$ داریم،

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(a \bullet f) &= W((ae_J) \cdot f) = (ae_J) \cdot W(f) \\ &= a \cdot (e_J \cdot W(f)) = a \cdot W(f) \\ &= a \cdot \widetilde{W}(f).\end{aligned}$$

بنابراین، $\widetilde{W}$ یک هم‌ریختی A-مدولی چپ است. بعلاوه، نگاشت $\widetilde{T} : \widetilde{F} \longrightarrow \widetilde{K}$ که به صورت $\widetilde{T}(f) = T(f)$ تعریف می‌گردد، یک تک‌ریختی قابل‌قبول است به قسمی که،

$$\begin{aligned} I(\phi, \widetilde{K}) &= \text{span}\{a \bullet k - \phi(a)k : a \in A, k \in K\} \\ &= \text{span}\{(ae_J) \cdot k - \phi(ae_J)k : a \in A, k \in K\} \\ &\subseteq \text{Im}T = \text{Im}\widetilde{T}. \end{aligned}$$

چون $E \in$ **A-mod** یک مدول ϕ-انژکتیو چپ است عضوی مانند $S \in {}_AB(\widetilde{K}, E)$ وجود دارد به طوری که $S \circ \widetilde{T} = \widetilde{W}$. از سوی دیگر، به ازای هر $a \in J$ و $k \in K$ داریم،

$$a \cdot S(k) = S(a \bullet k) = S((ae_J) \cdot k) = S(a \cdot k).$$

بنابراین، $S \in {}_JB(K, E)$. پس $E \in$ **J-unmod**، $\phi_{|J}$-انژکتیو چپ است.

ب: فرض کنیم $F, K \in$ **A-mod** و $T : F \longrightarrow K$ یک تک‌ریختی قابل‌قبول است به قسمی که $I(\phi, K) \subseteq \text{Im}T$. اگر $W \in {}_AB(F, E)$، آنگاه $W \in {}_JB(F, E)$. بنابراین، عضوی مانند $S \in {}_JB(K, E)$ وجود دارد به قسمی که $S \circ T = W$. اما برای هر $a \in J, b \in A$ و $k \in K$ داریم،

$$\begin{aligned} a \cdot (S(b \cdot k) - b \cdot S(k)) &= a \cdot S(b \cdot k) - (ab) \cdot S(k) \\ &= S(ab \cdot k) - S(ab \cdot k) = 0. \end{aligned}$$

چون $E \in$ **J-mod** صادق است، رابطه فوق نتیجه می‌دهد که $S(b \cdot k) = b \cdot S(k)$. بنابراین، $S \in {}_AB(K, E)$ و این، برهان این قسمت را کامل می‌کند. □

نتیجه ۳.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ، $\phi \in \Delta(A)$ و J یک ایده‌ال بسته از A است که دارای همانی است و $\phi_{|J \neq 0}$. در این صورت $J \in$ **A-mod**، ϕ-انژکتیو چپ است اگر و تنها اگر $J \in$ **J-mod**، $\phi_{|J}$-انژکتیو چپ باشد.*

برهان. چون J دارای عضو همانی است به راحتی بررسی می‌گردد که $J \in$ **J-mod** صادق است. بنابراین نتیجه از قضیه ۲.۲.۴ بدست می‌آید. □

تعریف زیر برای اولین بار توسط فارست در مرجع [20] مطرح و بررسی شده است.

تعریف ۱.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ، $X \in$ **A-mod** و Y یک A-زیر مدول باناخ از X است. می‌گوئیم Y در X مکمل ناوردای چپ است اگر $P \in {}_AB(X, Y)$ موجود باشد به قسمی که $P^2 = P$ و $P(X) = Y$، یعنی P یک تصویر از X به روی Y است. به طور مشابه مفهوم مکمل ناوردای راست نیز تعریف می‌شود.*

مثال ۱۱. [53, pp. 1023] *فرض کنیم A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کراندار (e_α) و $X \in$ **A-mod** یک فضای باناخ انعکاسی است. در این صورت، $X_e = \overline{AX} = A \cdot X$ یک زیر فضای مکمل ناوردای چپ در X است. چون هر زیر فضای بسته از یک فضای انعکاسی، انعکاسی است* [6, Corollary 4.3]*، از این رو نگاشت*

$$P : X \longrightarrow X_e, \quad P(x) = w^* - \lim_\alpha (e_\alpha . x) \quad (x \in X),$$

یک تصویر و یک هم‌ریختی A-مدولی چپ از X به روی X_e است.

قضیه ۳.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ، $\{E_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ یک گردایه از A-مدول‌های چپ باناخ است و*

$$E = \ell^1 - \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma.$$

الف) *اگر E یک A-مدول چپ ϕ-انژکتیو باشد، آنگاه برای هر $\gamma \in \Gamma$، $E_\gamma \in$ **A-mod** نیز ϕ-انژکتیو چپ است.*

ب) *اگر Γ یک مجموعه اندیس‌گذار متناهی و برای هر γ، E_γ، ϕ-انژکتیو چپ باشد، آنگاه E نیز ϕ-انژکتیو چپ است.*

برهان. الف) به وضوح بررسی می‌شود که برای هر $\gamma_\circ \in \Gamma$، نگاشت $P_{\gamma_\circ} : E \longrightarrow E_{\gamma_\circ}$ با ضابطه $P_{\gamma_\circ}(e_\gamma) = e_{\gamma_\circ}$ یک هم‌ریختی A-مدولی چپ و یک تصویر از E به روی E_γ است. بنابراین $E_{\gamma_\circ}$ در E مکمل ناوردای چپ است.

بنابراین برای هر $\gamma \in \Gamma$، $P_\gamma \in {}_A B(E, E_\gamma)$ وجود دارد به قسمی که $P_\gamma(E) = E_\gamma$ و $P_\gamma^2 = P_\gamma$. فرض کنیم $i_\gamma : E_\gamma \longrightarrow E$ نشاننده طبیعی E_γ در E است.

اگر E، ϕ-انژکتیو چپ باشد، آنگاه ${}_\phi\rho^E \in {}_A B({}_\phi B(A^\sharp, E), E)$ وجود دارد به قسمی که یک وارون چپ برای نگاشت ${}_\phi\Pi^E : E \longrightarrow {}_\phi B(A^\sharp, E)$ است. برای هر $\gamma \in \Gamma$ نگاشت ${}_\phi\rho^\gamma : {}_\phi B(A^\sharp, E_\gamma) \longrightarrow E_\gamma$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_\phi\rho^\gamma(T) = P_\gamma \circ {}_\phi\rho^E(i_\gamma \circ T) \qquad (T \in {}_\phi B(A^\sharp, E_\gamma)).$$

نشان می‌دهیم که ${}_\phi\rho^\gamma$ یک هم‌ریختی A-مدولی چپ است به قسمی که ${}_\phi\rho^\gamma \circ {}_\phi\Pi^\gamma = I_{E_\gamma}$.

چون برای هر $x \in E_\gamma$، $i_\gamma \circ {}_\phi\Pi^\gamma(x) = {}_\phi\Pi^E(i_\gamma(x))$، بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} {}_\phi\rho^\gamma \circ_\phi \Pi^\gamma(x) &= P_\gamma \circ_\phi \rho^E(i_\gamma \circ_\phi \Pi^\gamma(x)) = P_\gamma \circ_\phi \rho^E({}_\phi\Pi^E(i_\gamma(x))) \\ &= P_\gamma(i_\gamma(x)) = x. \end{aligned}$$

در نتیجه، ${}_\phi\rho^\gamma \circ {}_\phi\Pi^\gamma = I_{E_\gamma}$. از سوی دیگر چون $P_\gamma \in {}_A B(E, E_\gamma)$، به راحتی بررسی می‌شود که ${}_\phi\rho^\gamma$ یک هم‌ریختی A-مدولی چپ است و این برهان قسمت الف را کامل می‌کند.

ب) فرض کنیم Γ یک مجموعه متناهی و برای هر $\gamma \in \Gamma$، E_γ یک A-مدول چپ ϕ-انژکتیو است. از این رو نگاشت ${}_\phi\rho^\gamma \in {}_A B({}_\phi B(A^\sharp, E_\gamma), E_\gamma)$ وجود دارد به قسمی که ${}_\phi\rho^\gamma \circ {}_\phi\Pi^\gamma = I_{E_\gamma}$. نگاشت $\rho : {}_\phi B(A^\sharp, E) \longrightarrow E$ را

به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(T) = ({}_\phi\rho^\gamma(P_\gamma \circ T))_{\gamma\in\Gamma} \qquad (T \in {}_\phi B(A^\sharp, E)).$$

چون Γ متناهی است نگاشت ρ خوش تعریف است. برای هر $a \in A$ و $T \in {}_\phi B(A^\sharp, E)$ داریم،

$$\begin{aligned}\rho(a\cdot T) = ({}_\phi\rho^\gamma(P_\gamma \circ (a\cdot T)))_{\gamma\in\Gamma} &= ({}_\phi\rho^\gamma(a\cdot(P_\gamma\circ T)))_{\gamma\in\Gamma}\\ &= (a\cdot\ {}_\phi\rho^\gamma(P_\gamma\circ T))_{\gamma\in\Gamma}\\ &= a\cdot({}_\phi\rho^\gamma(P_\gamma\circ T))_{\gamma\in\Gamma}\\ &= a\cdot\rho(T).\end{aligned}$$

بعلاوه اگر $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ یک عضو دلخواه از E باشد، داریم $P_\gamma \circ\ {}_\phi\Pi^E(x) =\ {}_\phi\Pi^\gamma(x_\gamma)$. از این رو

$$\rho\circ\ {}_\phi\Pi^E(x) = ({}_\phi\rho^\gamma(P_\gamma\circ_\phi \Pi^E(x)))_{\gamma\in\Gamma} = ({}_\phi\rho^\gamma({}_\phi\Pi^\gamma(x_\gamma)))_{\gamma\in\Gamma} = (x_\alpha)_{\gamma\in\Gamma} = x.$$

بنابراین E، ϕ-انژکتیو چپ است. □

قضیه ۴.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ، $\phi \in \Delta(A)$، B یک زیر جبر A و J یک ایده‌ال بسته چپ از A است.*

الف: *اگر B در A مکمل ناوردای چپ و $A \in$ **A-mod**، ϕ-انژکتیو چپ باشد، آنگاه $B \in$ **A-mod**، ϕ-انژکتیو چپ است.*

ب: *اگر J در A مکمل ناوردای چپ باشد، آنگاه J و $\frac{A}{J}$ در **A-mod**، ϕ-انژکتیو چپ هستند اگر و تنها اگر $A \in$ **A-mod**، ϕ-انژکتیو چپ باشد.*

برهان. الف: چون B در A مکمل ناوردای چپ است تصویر پوشای $P \in {}_AB(A, B)$ وجود دارد. بنابراین

$$A \cong \mathrm{Im}P \oplus \ker P = B \oplus \ker P,$$

به عنوان A-مدول‌های چپ. در نتیجه با توجه به قضیه ۳.۲.۴، $B \in$ **A-mod**، ϕ-انژکتیو چپ است.

ب: چون J در A مکمل ناوردای چپ است تصویر پوشای $P \in {}_AB(A, J)$ وجود دارد. حال نشان می‌دهیم که $A \cong J \oplus \frac{A}{J}$ به عنوان دو A-مدول چپ. برای این منظور نگاشت $T : A \longrightarrow J \oplus \frac{A}{J}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(a) = (P(a), a + J) \qquad (a \in A).$$

نگاشت T یک هم‌ریختی A-مدولی چپ است چون برای هر $a, b \in A$ داریم،

$$\begin{aligned}T(ab) &= (P(ab), ab + J) = (aP(b), a(b + J))\\ &= a\cdot(P(b), b + J) = a\cdot T(b).\end{aligned}$$

از سوی دیگر، اگر $a \in \mathrm{Im}P \cap \ker P$، آنگاه $b \in A$ وجود دارد به قسمی که $P(b) = a$. از این رو

$$a = P(b) = P(P(b)) = P(a) = ۰.$$

بنابراین $\mathrm{Im}P \cap \ker P = \{۰\}$ و این نتیجه می‌دهد که T یک به یک است. همچنین T پوشاست، چون برای $(a, b+J) \in J \oplus \frac{A}{J}$ اگر قرار دهیم، $c = a + b - P(b)$، در این صورت $T(c) = (a, b+J)$. حال حکم از قضیه ۳.۲.۴ بدست می‌آید. □

به عنوان کاربردی از قضیه ۴.۲.۴ و نتیجه ۱.۲.۴ نتیجه زیر را برای جبرهای باناخ جابه‌جایی بدست می‌آوریم.

نتیجه ۴.۲.۴. *فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه‌جایی، $\phi \in \Delta(A)$ و J یک ایده‌ال بسته مکمل ناوردا از A است به قسمی که $\phi_{|J} \neq ۰$. در این صورت $A \in$ **A-mod**، ϕ-انژکتیو چپ است اگر و تنها اگر $J \in$ **A-mod**، ϕ-انژکتیو چپ باشد.*

۳.۴ کاربرد روی جبرهای نیم‌گروهی

در این بخش با استفاده از قضایای بخش قبل، به مطالعه مدول‌های ϕ-انژکتیو چپ برخی از جبرهای باناخ جابه‌جایی نیم‌گروهی می‌پردازیم و مثال‌هایی از برخی مدول‌ها که انژکتیو چپ نیستند اما ϕ-انژکتیو چپ هستند را ارائه می‌دهیم.

گزاره زیر که در ادامه از آن استفاده خواهیم نمود به راحتی از نتیجه ۴.۲.۴ بدست می‌آید.

گزاره ۱.۳.۴. *فرض کنیم S یک نیم‌مشبکه، $\phi \in \Delta(\ell^۱(S))$ و I یک ایده‌ال بسته مکمل ناوردا از $\ell^۱(S)$ است به قسمی که $\phi_{|I} \neq ۰$. در این صورت $\ell^۱(S) \in \ell^۱(S)$-**mod**، ϕ-انژکتیو چپ است اگر و تنها اگر $I \in \ell^۱(S)$-**mod**، ϕ-انژکتیو چپ باشد.*

فرض کنیم $\ell^۱(N_\wedge)$ یک جبر نیم‌گروهی روی نیم‌گروه $S = (\mathbb{N}, \wedge)$ با عمل ضرب زیر است:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (m,n) \longrightarrow m \wedge n = \min\{m,n\}.$$

بنا به [8, Example 4.10] می‌دانیم $\Phi_S = \{\widehat{\phi}_n : n \in \mathbb{N}\}$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\widehat{\phi}_n(m) = \begin{cases} ۱ & m \geq n \\ ۰ & m < n \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنیم I_n ایده‌ال تولید شده توسط $\{\delta_۱, \delta_۲, \delta_۳, \ldots, \delta_n\}$ در $\ell^۱(\mathbb{N}_\wedge)$ است. به آسانی بررسی می‌گردد که جبر باناخ خارج قسمتی $\ell^۱(\mathbb{N}_\wedge)/I_n$ دارای عضو همانی نیست. بنابراین ایده‌ال I_n دارای همانی مدولار نیست. از این رو طبق قضیه ۶.۴.۱، $\ell^۱(\mathbb{N}_\wedge)/I_n$ به عنوان یک $\ell^۱(\mathbb{N}_\wedge)$-مدول چپ باناخ انژکتیو چپ نیست.

ازطرفی طبق [8, Example 4.10] می‌دانیم که $\ell^۱(\mathbb{N}_\wedge)$ داری عضو همانی نیست . بنابراین به عنوان یک $\ell^۱(\mathbb{N}_\wedge)$-مدول چپ، انژکتیو چپ نیست.

با توجه به فضای نیم‌سرشت‌های نیم‌گروه $\mathbb{N}_\wedge$، برای هر عدد طبیعی n نگاشت $\phi_n : \ell^1(\mathbb{N}_\wedge) \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه

$$\phi_n(f) = \sum_{i=n}^{\infty} f(i) \qquad (f \in \ell^1(\mathbb{N}_\wedge)),$$

یک سرشت روی $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$ است.

قضیه ۱.۳.۴. [15, Theorem 2.1] *فرض کنیم S یک نیم‌مشبکه است و $\phi \in \Phi_S$. اگر $t \in S$ موجود باشد که $\phi(t) = 0$ و $S \setminus tS$ یک مجموعه متناهی است، آنگاه $\ell^1(S)$، $\widehat{\phi}$-میانگین‌پذیر است.*

قضیه بعدی یکی از نتایج اصلی این فصل است.

قضیه ۲.۳.۴. الف: *$\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)/I_n$ به عنوان یک $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$-مدول چپ باناخ برای هر $n \in \mathbb{N}$، ϕ_n-انژکتیو چپ است.*

ب: *$\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$ به عنوان یک $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$-مدول چپ باناخ برای هر $n \in \mathbb{N}$، ϕ_n-انژکتیو چپ است.*

برهان. الف: چون $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$ جابه‌جایی است و $(\phi_n)_{|I_n} \neq 0$، با توجه به نتیجه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)/I_n$ به عنوان یک $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$-مدول چپ، ϕ_n -انژکتیو چپ است و این اثبات قسمت (الف) را کامل می‌کند.

ب: ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، ایده‌ال I_n تولید شده توسط $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n\}$ یک ایده‌ال مکمل ناوردا از $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$ است. برای این منظور فرض کنیم نگاشت $P_n : \ell^1(\mathbb{N}_\wedge) \longrightarrow I_n$ به صورت زیر تعریف شود:

$$P_n(f) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)\delta_i + (\sum_{i=n}^{\infty} f(i))\delta_n \qquad (f \in \ell^1(\mathbb{N}_\wedge)).$$

به راحتی بررسی می‌گردد که P_n یک تصویر به روی I_n است. به علاوه اگر $f, g \in I_n$ داریم، $P_n(f * g) = f * P_n(g)$. اگر f و g در I_n نباشند، بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم، $f = \delta_i$ و $g = \delta_j$ که $n < i \leq j$. بنابراین داریم،

$$P_n(\delta_i * \delta_j) = P_n(\delta_i) = \delta_n = \delta_i * \delta_n = \delta_i * P_n(\delta_j).$$

در نتیجه I_n یک ایده‌ال مکمل ناوردا و بسته از $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$ است.

حالت اول: نشان می‌دهیم که $A = \ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$، ϕ_1-انژکتیو چپ است. چون I_1 مکمل ناورداست، $(\phi_1)_{|I_1} \neq 0$ و A جابه‌جایی است، با توجه به گزاره ۱.۳.۴ کافی است نشان دهیم $I_1 \in$ **A-mod**، ϕ_1-انژکتیو چپ است. نگاشت $\rho : {}_{\phi_1}B(A^\sharp, I_1) \longrightarrow I_1$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(T) = T(e^\sharp) \qquad (T \in {}_{\phi_1}B(A^\sharp, I_1).$$

به وضوح ρ یک وارون چپ برای ${}_{\phi_1}\Pi^\sharp : I_1 \longrightarrow {}_{\phi_1}B(A^\sharp, I_1)$ است. حال نشان می‌دهیم که ρ یک هم‌ریختی A-مدولی چپ است.

برای هر $f \in A$ و $g \in I_1$ به وضوح $f * g = \phi_1(f)g$ و همچنین اگر $T \in {}_{\phi_1}B(A^\sharp, I_1)$ برای هر $f, g \in A$ داریم،

$$T(f * g - \phi_1(g)f) = f \cdot T(g - \phi_1(g)e^\sharp).$$

پس در حالتی که $g = \delta_1$ نتیجه می‌گیریم،

$$\begin{aligned} T(\phi_1(f)\delta_1 - \phi_1(g)f) &= T(f * g - \phi_1(g)f) \\ &= f \cdot T(g - \phi_1(g)e^\sharp) \\ &= f * T(g - \phi_1(g)e^\sharp) \\ &= \phi_1(f)T(\delta_1 - \phi_1(\delta_1)e^\sharp) \\ &= \phi_1(f)T(\delta_1 - e^\sharp). \end{aligned}$$

بنابراین، $T(f) = \phi_1(f)T(e^\sharp)$. رابطه اخیر نتیجه می‌دهد که برای هر $f \in A$ و $T \in {}_{\phi_1}B(A^\sharp, I_1)$،

$$\begin{aligned} \rho(f \cdot T) &= (f \cdot T)(e^\sharp) = T(e^\sharp f) = T(f) \\ &= \phi_1(f)T(e^\sharp) = f \cdot T(e^\sharp) = f \cdot \rho(T). \end{aligned}$$

پس ρ یک هم‌ریختی A-مدولی چپ است که یک وارون چپ برای ${}_{\phi_1}\Pi^\sharp$ نیز می‌باشد. بنابراین، $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$ به عنوان یک $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$-مدول چپ، ϕ_1 -انژکتیو چپ است.

حالت دوم: برای هر $n \geq 2$ نشان می‌دهیم که $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$، به عنوان یک $\ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$-مدول چپ، ϕ_n-انژکتیو چپ است. چون $I_n \in \mathbf{I}_n\text{-mod}$ دارای همانی δ_n است بنابراین صادق می‌باشد. بنا به قضیه ۲.۲.۴ کافی است نشان دهیم که $I_n \in \mathbf{I}_n\text{-mod}$، $(\phi_n)_{|I_n}$-انژکتیو چپ است.

فرض کنیم $\widehat{\phi_n}$ یک نیم‌سرشت روی $\mathbb{N}_\wedge$ مرتبط با ϕ_n باشد. چون $S = (\{1, 2, 3, ..., n\}, \wedge)$ یک نیم‌مشبکه است و $\widehat{\phi_n}(1) = 0$، با توجه به قضیه ۱.۳.۴ نتیجه می‌گیریم که $I_n = \ell^1(\{1, 2, 3, \ldots, n\}, \wedge)$، $(\phi_n)_{|I_n}$-میانگین‌پذیر است. بنابراین قضیه ۲.۱.۴ نتیجه می‌دهد که، $c_0(S)$ در $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{I}_n$، $(\phi_n)_{|I_n}$-تخت است.

از این رو $I_n = c_0(S)^*$ در $\mathbf{I}_n\text{-mod}$، $(\phi_n)_{|I_n}$-انژکتیو چپ است و این اثبات را کامل می‌کند. □

می‌دانیم $\ell^1(\mathbb{N}_\vee)$ یک جبر نیم‌گروهی روی نیم‌گروه $S = (\mathbb{N}, \vee)$ با ضرب زیر است:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (m, n) \longrightarrow m \vee n = \max\{m, n\}.$$

بنا به [8, Example 4.9] می‌دانیم $\Phi_S = \{\widehat{\psi}_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\widehat{\psi_S}\}$ که در آن $\widehat{\psi_S}$ سرشت بدیهی است و برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\widehat{\psi}_n(m) = \begin{cases} 1 & m \leq n \\ 0 & m > n \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

در [55, Example 5.6] نشان داده شده است که $\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$ به عنوان یک $\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$-مدول چپ انژکتیو نیست. در قضیه بعدی نشان می‌دهیم که $\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$ برای هر $\phi \in \Delta(\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee}))$، ϕ-انژکتیو چپ است.

قضیه ۳.۳.۴. *فرض کنیم $A = \ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$. در این صورت $A \in$ **A-mod** برای هر $\phi \in \Delta(A)$، ϕ-انژکتیو چپ است.*

برهان. با توجه به [15, Corollary 2.2]، می‌دانیم که A سرشت میانگین‌پذیر است. پس برای هر $\phi \in \Delta(\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee}))$، A، ϕ-میانگین‌پذیر است. از سوی دیگر چون $\mathbb{N}_{\vee}$ حذف‌شدنی ضعیف است، بنا به قضیه ۱.۴.۱ نتیجه می‌گیریم که $c_{\circ}(\mathbb{N}_{\vee})$ یک باناخ $\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$-مدول چپ است. پس $c_{\circ}(\mathbb{N}_{\vee})$ به عنوان یک $\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$-مدول راست، ϕ-تخت است. در نتیجه $c_{\circ}(\mathbb{N}_{\vee})^{*} = \ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$ به عنوان یک $\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$-مدول چپ، ϕ-انژکتیو چپ می‌باشد و این اثبات را کامل می‌کند. □

برای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنیم J_n ایده‌ال بسته از $A = \ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$ تولید شده توسط $\{\delta_n, \delta_{n+1}, \ldots\}$ باشد. به راحتی بررسی می‌گردد که J_n یک ایده‌ال مکمل ناوردا در $A = \ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$ است. در واقع نگاشت $Q_n : A \longrightarrow J_n$ که به صورت زیر تعریف می‌گردد،

$$Q_n(f) = (\sum_{i=1}^{n} f(i))\delta_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)\delta_i \qquad (f \in A),$$

یک تصویر پوشا در ${}_{A}B(A, J_n)$ است.

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۳.۳.۴ و نتیجه ۴.۲.۴، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۱.۳.۴. *برای هر $n \in \mathbb{N}$، J_n به عنوان یک باناخ $\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee})$-مدول چپ، برای هر $\phi \in \Delta(\ell^{1}(\mathbb{N}_{\vee}))$ که $\phi_{|J_n} \neq 0$، ϕ-انژکتیو چپ است.*

مراجع

[1] M. Amyari and M. Mirzavaziri, Ideally factored algebras, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyha'zi. (N.S)*. 24 (2008), no. 2, 227–233.

[2] J. Arhippainen and J. Kauppi, Generalization of the B^*-algebra $(C_0(X), ||\cdot||_\infty)$, *Math. Nachr*. 282 (2009), 1, 7–15.

[3] R. Arens, The adjoint of a bilinear operation, *Proc. Amer. Math. Soc*. 2 (1951), 839–848.

[4] J. T. Burnham, Closed ideals in subalgebras of Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc*. 32 (1972), 551–555.

[5] C. Chou and G. Xu, The weak closure of the set of left translation operators, *Proc. Amer. Math. Soc*. 127 (1999), 465–470.

[6] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, second edition, Springer, New York, 1990.

[7] H. G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity*. Clarendon Press, Oxford, 2000.

[8] H. G. Dales, A. T. Lau and D. Strauss, Banach algebras on semigroups and their compactifications, *Memoirs of American Math. Soc*. 205 (2010), 1–165.

[9] H. G. Dales, M. Daws, H. L. Pham and P. Ramsden, Multi-norms and the injectivity of $L^p(G)$, *J. London Math. Soc*. 86 (2012), (3), 779–809.

[10] H. G. Dales and M. E. Polyakov, Homological properties of modules over group algebras, *Proc. London Math. Soc*. 89 (2004), 390–426.

[11] ———, Multi-normed spaces, *Dissertationes Math*. 488 (2012), 1–165.

[12] A. Derighetti, *Convolution Operators on Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[13] R. S. Doran and J. Wichmann, *Approximate Identities and Factorization in Banach Modules*, Lecture Notes in Math. 768. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[14] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publishers, New York, 1958.

[15] M. Essmaili and M. Filali, ϕ-amenability and character amenability of some classes of Banach algebras, *Houston J. Math.* 39 (2013), no 2, 515–529.

[16] M. Essmaili, M. Fozouni and J. Laali, Hereditary properties of character injectivity with application to semigroup algebras, *Ann. Funct. Anal.* 6 (2015), no. 2, 162–172.

[17] P. Eymard, L'algebre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France* 92 (1964), 181–236.

[18] A. Figa-Talamanca, Translation invariant operators in L^p, *Duke. Math. J.* 32 (1965), 495–502.

[19] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, New York, 1995.

[20] B. E. Forrest, Amenability and bounded approximate identities in ideals of $A(G)$, *Illinois J. Math.* 34 (1990), no 1, 1–25.

[21] B. Forrest, E. Kaniuth, A.T. Lau and N. Spronk, Ideals with bounded approximate identities in Fourier algebras, *J. Funct. Anal.* 203 (2003), 286–304.

[22] B. Forrest and V. Runde, Amenability and weak amenability of the Fourier algebra, *Math. Z*, 250 (2005) 4, 731–744.

[23] B. Forrest and M. Skantharajah, A note on a type of approximate identity in the Fourier algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* 120 (1994), no 2, 651–652.

[24] F. Ghahramani and A. T. M. Lau, Weak amenability of certain classes of Banach algebras without bounded approximate identities, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 133 (2002), no. 357, 357–371.

[25] E. E. Granirer, The Figa-Talamanca-Herz-Lebesgue Banach algebras $A_p^r(G) = A_p(G) \cap L^r(G)$, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 140 (2006), 401–416.

[26] U. Haagerup, All nuclear C^*-algebras are amenable, *Invent. Math.* 74 (1983), 305–319.

[27] M. Hejazian, M. Mirzavaziri and M. S. Moslehian, n-Homomorphisms, *Bull. Iranian Math. Soc.* 31 (2005), no. 1, 13–23.

[28] A. Ya. Helemskii, *The Homology of Banach and Topological Algebras*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.

[29] C. S. Herz, Harmonic synthesis for subgroups, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* Vol XXIII, 3 (1973), 91–123 .

[30] C. S. Herz, Remarques sur la note precedente de M. Varopoulos, *C. R. Acad. Sci. Paris.* 260 (1965), 6001–6004.

[31] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. 1, 2nd edition, Springer, Berlin, 1979.

[32] ———, *Abstract Harmonic Analysis II*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 152. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1997.

[33] J. Inoue and S. E. Takahasi, Constructions of bounded weak approximate identities for Segal algebras on LCA groups, *Acta Sci. Math. (Szeged).* 66 (2000), 1–2, 257–271.

[34] B. E. Johnson, Cohomology in Banach algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.* 127 (1972).

[35] C. A. Jones and C. D. Lahr, Weak and norm approximate identities are different, *Pacific J. Math.* 72 (1977), no. 1, 99–104.

[36] Z. Kamali and M. L. Bami, Bochner-Schoenberg-Eberlein property for abstract Segal algebras, *Proc. Japan Acad. Ser. A.* 89 (2013), 107–110.

[37] E. Kaniuth, *A Course in Commutative Banach Algebras*, Springer Verlag, Berlin , 2009.

[38] E. Kaniuth and A. Ülger, The Bochner-Schoenberg-Eberlian property for commutative Banach algebras, especially Fourier-Stieltjes algebras, *Trans. Amer. Math, Soc.* 362 (2010), 4331–4356.

[39] E. Kaniuth, A. T-M Lau and J. S. Pym, On φ-amenability of Banach algebras, *Math. Proc. Camb. Phil. Sci.* 144 (2008), 85–96.

[40] A. R. Khodami and H. R. Ebrahimi Vishki, The higher dual of a Banach algebra induced by a bounded linear functional, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 3 (2011), no. 2, 118–122.

[41] J. Laali and M. Fozouni, Closed ideals with bounded Δ-weak approximate identities in some certain Banach algebras, submitted.

[42] ———, On Δ-weak ϕ-amenability of Banach algebras, *U. P. B. Sci. Bull. Series A.* to appear.

[43] ———, Some properties of functional Banach algebras, *Facta Universitatis (NIŠ), Ser. Math. Inform.* 28 (2013), no. 2, 189–196.

[44] H. Leptin, Sur l'algebre de Fourier d'un groupe localement compact, *R. Acad. Sci. Paris, Ser. A.* 266 (1968), 1180–1182.

[45] M. S. Monfared, Character amenability of Banach algebras, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 144 (2008), 697–706.

[46] ———, On certain products of Banach algebras with applications to harmonic analysis, *Studia Math.* 178 (2007), 277–294.

[47] Z. Hu, M. Sangani Monfared and T. Traynor, On character amenable Banach algebras, *Studia. Math.* 193 (2009), 1, 53–78.

[48] G. J. Murphy, *C^*-Algebra and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[49] M. T. Nair, *Functional Analysis: A First Course*, Prentice Hall of India, New Delhi, 2002.

[50] R. Nasr-Isfahani and S. Soltani Renani, Character injectivity and projectivity of Banach modules, *Quart. J. Math.* 65 (2014), 2, 665–676.

[51] R. Nasr-Isfahani and M. Nemati, Essential character amenability of Banach algebras, *Bull. Aust. Math. Soc.* 84 (2011), 372–386.

[52] J. P. Pier, *Amenable Locally Compact Groups*, John-Wiely. New York, 1984.

[53] G. Racher, Injective modules and amenable groups, *Comment. Math. Helv.* 88 (2013), 1023–1031.

[54] P. Ramsden, *Homological Properties of Semigroup Algebras*, Ph. D. Thesis, University of Leeds, 2008.

[55] P. Ramsden, Homological properties of modules over semigroup algebras, *J. Funct. Anal.* 258 (2010), 3988–4009.

[56] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1968.

[57] H. Reiter, L^1*-Algebras and Segal Algebras*, Lecture Notes in Math. 231, Springer, Berlin, 1971.

[58] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[59] ———, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1970.

[60] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Springer Verlag, Berlin, 2002.

[61] M. Sangani Monfared, Extensions and isomorphisms for the generalized Fourier algebras of a locally compact group, *J. Funt. Anal.* 198 (2003), 413–444.

[62] I. E. Segal, The group algebra of a locally compact group, *Trans. Amer. Math. Soc.* 61 (1947), 69–105.

[63] S. E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner–Schoenberg–Eberlein-type theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 110 (1990), 149–158.

[64] A. Ülger, Some results about the spectrum of commutative Banach algebras under the weak topology and applications, *Monatsh. Math.* 121 (1996), 353–379.

[65] N. Wiener, Tauberian theorems, *Ann. of Math.* 33 (1932), 1–100.

[66] Y. Zhang, Weak amenability of a class of Banach algebras, *Canad. Math. Bull.* 44 (2001), 4, 504–508.

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

Admissible ..... پذیرفتنی
Amenable ..... میانگین‌پذیر
Annihilator ..... پوچساز
Character ..... سرشت، مشخصه
Cohomology ..... همانستگی
Commutative ..... جابه‌جایی
Complemented ..... مکمل
Co-retraction ..... دوگان درون‌بری
Contractible ..... انقباض‌پذیر
Derivation ..... اشتقاق
Discrete ..... گسسته
Essential ..... اساسی
Faithful ..... صادق
Flat ..... تخت
Functional Banach algebra ..... جبر باناخ تابعکی
Hereditary ..... موروثی
Homology ..... مانستگی
Invariant ..... ناوردا
Involution ..... برگشت
Isometric ..... طول‌پای
Iterated ..... مکرر
Kernel ..... هسته
Modular ..... مدولار، هنگی
Representation ..... نمایش

درون‌بری ..... Retraction

نیم‌سرشت ..... Semi-character

نیم‌مشبکه ..... Semi-lattice

تکیه‌گاه ..... Support

یکانی ..... Unitary

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

اشتقاق ..... Derivation
انقباض‌پذیر ..... Contractible
اساسی ..... Essential
برگشت ..... Involution
پوچساز ..... Annihilator
تخت ..... Flat
جابه‌جایی ..... Commutative
جبر باناخ تابعکی ..... Functional Banach algebra
درون‌بری ..... Retraction
دوگان درون‌بری ..... Co-retraction
صادق ..... Faithful
طول‌پای ..... Isometric
پذیرفتنی ..... Admissible
گسسته ..... Discrete
تکیه‌گاه ..... Support
سرشت، مشخصه ..... Character
مانستگی ..... Homology
مکرر ..... Iterated
مکمل ..... Complemented
موروثی ..... Hereditary
میانگین‌پذیر ..... Amenable
ناوردا ..... Invariant
نمایش ..... Representation
نیم‌سرشت ..... Semi-character

نیم‌مشبکه ..... Semi-lattice

تکیه‌گاه ..... Kernel

همانستگی ..... Cohomology

مدولار، هنگی ..... Modular

یکانی ..... Unitary

نمایه

A-مدول، ۱۵
BSE-جبر، ۱۳
C^*-جبر، ۶
σ-جبر، ۷
σ-جبر بورل، ۷
p-شبه‌اندازه، ۱۲

جبر ϕ-میانگین‌پذیر Δ-ضعیف، ۲۹
قضیه هاینه-بورل، ۲

اشتقاق، ۱۶
اندازه، ۷
اندازه رادون، ۷
اندازه هار، ۸
برگشت، ۵
تصویر، ۲
توپولوژی ضعیف، ۲
توپولوژی ضعیف ستاره، ۲
توپولوژی قوی، ۲
تکیه‌گاه، ۱۱
جبر ϕ-میانگین‌پذیر، ۱۷
جبر آرنز منظم، ۵
جبر انقباض‌پذیر، ۱۶
جبر باناخ، ۳
جبر باناخ تابعکی، ۲۱
جبر باناخ دوگان، ۱۵
جبر سگال، ۹
جبر فوریه، ۱۰
جبر فیگا-تالامانکا-هرتس، ۱۰
جبر لبگ-فیگا-تالامانکا-هرتس، ۱۲
جبر میانگین‌پذیر، ۱۶
جبر نیم‌گروهی، ۱۴
جبرگروهی، ۸
درون‌بری، ۱۸
دوگان درون‌بری، ۱۸
زیر فضای مکمل، ۲
زیر فضای مکمل ناوردا، ۵۱
سرشت، ۳
ضرب آرنز، ۵

فضای باناخ، ۱
فضای تانسوری تصویری، ۴
فضای دوگان، ۱
قضیه باناخ-آل‌اوغلو، ۲
قضیه لپتین-هرتس، ۱۲
قضیه مازور، ۳
قضیه گلدشتاین، ۲
مدول ϕ-انژکتیو، ۴۸
مدول ϕ-تخت، ۴۸
مدول انژکتیو، ۱۸
مدول تخت، ۱۸
مدول تصویری، ۱۸
نمایش منظم چپ، ۸

نمایش یکانی، ۸
نگاشت پذیرفتنی، ۱۸
نیم گروه حذف‌شدنی، ۱۴
نیم گروه حذف‌شدنی ضعیف، ۱۴
نیم‌سرشت، ۱۴
نیم‌مشبکه، ۱۴
نیم‌گروه، ۱۳
هسته، ۳
همانی Δ-ضعیف، ۳۴
همانی تقریبی، ۴
همانی تقریبی Δ-ضعیف، ۵
پوچ‌ساز، ۱۹
پیچش، ۸

گروه موضعا فشرده، ۶
گروه میانگین‌پذیر، ۹
گروه همانستگی از مرتبه اول، ۱۶

Abstract

Let A be a Banach algebra and $\phi \in \Delta(A)$, where $\Delta(A)$ denotes the character space of A, consisting of all non-zero homomorphisms from A into $\mathbb{C}$. In this thesis, we focus on $\Delta(A)$ and investigate some properties of the algebras and Banach modules related to the characters of a Banach algebra A and study their connection with classical notions.

We introduce two classes of Banach algebras used as a source of counterexamples. We define the notion of Δ-weak ϕ-amenability of a Banach algebra A as a generalization of ϕ-amenability in the case that A has a one sided approximate identity. We say that A is Δ-weak ϕ-amenable, if there exists an $m \in A^{**}$ such that $m(\phi) = 0$ and $m(\psi.a) = \psi(a)$ for each $a \in \ker(\phi)$ and $\psi \in \Delta(A)$. It is shown that A is Δ-weak ϕ-amenable if and only if A has a bounded Δ-weak approximate identity. We investigate the hereditary properties of Δ-weak ϕ-amenability. As a main result, we show that $A_p(G)$, when $1 < p < \infty$, is Δ-weak ϕ-amenable if and only if G is an amenable group. We show that the converse of the Helemskii's problem is valid if we replace the notion of amenability by Δ-weak ϕ-amenability.

Finally, we study ϕ-injectivity of modules over a Banach algebra A and give application of these results for semigroup algebras. We show that if $A = \ell^1(\mathbb{N}_\wedge)$ or $\ell^1(\mathbb{N}_\vee)$, then for all $\phi \in \Delta(A)$, $A \in$ **A-mod** is ϕ-injective.

Keywords: *Banach algebra, character space, approximate identity, ϕ-amenability, injective, flat and projective module, locally compact group, group algebra, semigroup algebra, Figa-Talamanca-Herz algebra.*

Mathematics Subject Classification 2010: 46H05, 46H25, 43A30, 22D15, 46M10, 43A20.

In the Name of God

Faculty of Mathematical Sciences and Computer

Pure Mathematics (Analysis)

Title

Homological and Cohomological Properties of Banach Algebras Based on Characters

A thesis submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy
(PhD)

By

Mohammad Fozouni

Supervisor

Dr. Javad Laali

Advisor

Dr. Morteza Essmaili

December 2014

Faculty of Mathematical Sciences and Computer

Pure Mathematics (Analysis)

Title

Homological and Cohomological Properties of Banach Algebras Based on Characters

PhD Thesis

By

Mohammad Fozouni

Supervisor

Dr. Javad Laali

Advisor

Dr. Morteza Essmaili

Tehran, December 2014